

Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II
Anno Accademico 2013-2014
TERZA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II
Pisa, 19.07.14

Nome e cognome

Matricola

1. Sia $f(x, y) = 8x - x^2 - y^2$. Calcolare il massimo di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

2. Scrivere la matrice jacobiana nel punto $(1, -1)$ dell'applicazione vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (3y^3 - 9x^2y, 3x^3 - 9xy^2).$$

3. Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) = 5y^2 - x^4 - 3x + 2y$$

e sia f tale che $f(1) = 1$ e $g(x, f(x)) = 3$ in un intorno del punto $P = (1, 1)$. Calcolare $f'(1)$.

4. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t, \cos(3t), \sin(3t)).$$

5. Calcolare l'area della superficie Σ il cui sostegno è dato da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \leq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{5}, y^2 = x^2 + z^2\}.$$

6. Dire quale dei seguenti insiemi **non** è semplicemente connesso

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x \geq 0\}$

(b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = z = 0\}$

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 1, 0)\}$.

Durante il test è vietato l'uso di appunti, libri e calcolatrici di ogni tipo. Qualsiasi apparecchiatura elettronica va tenuta spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma comporta automaticamente l'annullamento della prova.

α

1

$$8\sqrt{3} - 3$$

2

$$\begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 18 \end{pmatrix}$$

3

$$7/12$$

4

$$\frac{\pi}{2} \sqrt{10}$$

5

$$\frac{5\pi}{2} \sqrt{2}$$

6

$$(6)$$

α

Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II
Anno Accademico 2013-2014
TERZA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II
Pisa, 19.07.14

Nome e cognome

Matricola

1. Sia $f(x, y) = -12y + x^2 + y^2$. Calcolare il minimo di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 5\}.$$

2. Scrivere la matrice jacobiana nel punto $(1, 2)$ dell'applicazione vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (3xy^2 - x^3, y^3 - 3x^2y).$$

3. Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) = x^4 + y^2 - 7x - 8y$$

e sia f tale che $f(-1) = 1$ e $g(x, f(x)) = 1$ in un intorno del punto $P = (-1, 1)$. Calcolare $f'(-1)$.

4. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [\pi, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(3t), t, \sin(3t)).$$

5. Calcolare l'area della superficie Σ il cui sostegno è dato da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, 0 \leq y \leq \sqrt{2}, y^2 = x^2 + z^2\}.$$

6. Dire quale dei seguenti insiemi **non** è semplicemente connesso

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = y = z\}$ (b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z \leq 0\}$
(c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 3\}$ (d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 0, 0)\}$.

Durante il test è vietato l'uso di appunti, libri e calcolatrici di ogni tipo. Qualsiasi apparecchiatura elettronica va tenuta spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma comporta automaticamente l'annullamento della prova.

β

1

$$5 - 12\sqrt{5}$$

2

$$\begin{pmatrix} 9 & 12 \\ -12 & 9 \end{pmatrix}$$

3

$$-\frac{11}{6}$$

4

$$\sqrt{10} \pi$$

5

$$\sqrt{2} \pi$$

6

(a)

β

Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II
Anno Accademico 2013-2014
TERZA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II
Pisa, 19.07.14

Nome e cognome

Matricola

1. Sia $f(x, y) = 9y - x^2 - y^2$. Calcolare il massimo di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

2. Scrivere la matrice jacobiana nel punto $(2, -1)$ dell'applicazione vettoriale $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (3x^2y - y^3, 3xy^2 - x^3).$$

3. Sia $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) = x^2 + y^4 - 8x + 7y$$

e sia f tale che $f(-1) = -1$ e $g(x, f(x)) = 3$ in un intorno del punto $P = (-1, -1)$. Calcolare $f'(-1)$.

4. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$(x(t), y(t), z(t)) = (\cos(2t), 2t, \sin(2t)).$$

5. Calcolare l'area della superficie Σ il cui sostegno è dato da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \leq 0, 0 \leq x \leq \sqrt{7}, x^2 = y^2 + z^2\}.$$

6. Dire quale dei seguenti insiemi **non** è semplicemente connesso

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

(b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : z \geq 0\}$

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : y = z = 0\}$

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Durante il test è vietato l'uso di appunti, libri e calcolatrici di ogni tipo. Qualsiasi apparecchiatura elettronica va tenuta spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma comporta automaticamente l'annullamento della prova.

8

1

14

2

$$\begin{pmatrix} -12 & 9 \\ -9 & -12 \end{pmatrix}$$

3

$$\frac{10}{3}$$

4

$$4\pi\sqrt{2}$$

5

$$\frac{7\pi\sqrt{2}}{2}$$

6

(c)

8

Corso di Algebra Lineare e Analisi Matematica II
Anno Accademico 2013-2014
TERZA PROVA SCRITTA DI ANALISI MATEMATICA II
Pisa, 19.07.14

Nome e cognome

Matricola

1. Sia $f(x, y) = 6x + x^2 + y^2$. Calcolare il minimo di f nell'insieme

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

2. Scrivere la matrice jacobiana nel punto $(1, 1)$ dell'applicazione vettoriale $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$F(x, y) = (2x^3 - 6xy^2, 6x^2y - 2y^3).$$

3. Sia $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$g(x, y) = x^2 - 5y^4 + 2x - 3y$$

e sia f tale che $f(1) = -1$ e $g(x, f(x)) = 1$ in un intorno del punto $P = (1, -1)$. Calcolare $f'(1)$.

4. Calcolare la lunghezza della curva $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizzata da

$$(x(t), y(t), z(t)) = (t, \cos(2t), \sin(2t)).$$

5. Calcolare l'area della superficie Σ il cui sostegno è dato da

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq 0, 0 \leq x \leq \sqrt{3}, x^2 = y^2 + z^2\}.$$

6. Dire quale dei seguenti insiemi **non** è semplicemente connesso

(a) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(1, 1, 1)\}$

(b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : y \geq 0\}$

(c) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(d) $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = y = 0\}$.

Durante il test è vietato l'uso di appunti, libri e calcolatrici di ogni tipo. Qualsiasi apparecchiatura elettronica va tenuta spenta nella propria borsa o giacca. L'inosservanza di questa norma comporta automaticamente l'annullamento della prova.

8

1

$$2 - 6\sqrt{2}$$

2

$$\begin{pmatrix} 0 & -12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

3

$$-\frac{4}{17}$$

4

$$\pi\sqrt{5}$$

5

$$\frac{3}{2}\pi\sqrt{2}$$

6

(d)

8