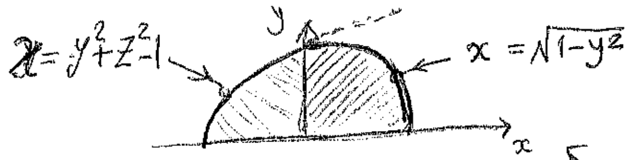
(2B) $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; y^2+z^2-1 \leq x \leq \sqrt{1-\cancel{z^2}-y^2} \}$



V è il solido ottenuto ruotando questo profilo attorno all'asse delle x.

(i)

$$\mathrm{Vol}(V) = \iint_D \left(\int_{y^2+z^2-1}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} dx \right) dy\,dz \qquad \text{dove } D := \{(y,z) : \; y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$= \iint_D \left(\sqrt{1-y^2-z^2} - y^2 - z^2 + 1\right) dy\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2 + 1\right)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\,d\rho - \int_0^1 \rho^3 d\rho + \int_0^1 \rho\, d\rho \right) = 2\pi \left(\left[-\frac{1}{3}(1-\rho^2)^{3/2}\right]_0^1 - \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 + \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^1 \right)$$

$$= \frac{2}{3}\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{7}{6}\pi$$

(ii) Per il teorema della divergenza si ha

$$\iint_{\partial V} \vec{F} \cdot \vec{n}_e \, dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx\,dy\,dz$$

con $\operatorname{div}\vec{F} = yz + 1$.

$$\iiint_V (yz+1)\,dx\,dy\,dz = \boxed{\iiint_V yz \, dx\,dy\,dz} + \boxed{\iiint_V 1 \, dx\,dy\,dz}$$

si veda dopo $\rightarrow 0$

per il punto (i) $\rightarrow \frac{7}{6}\pi$

$$\iiint_V yz\,dx\,dy\,dz = \iint_D \left(\int_{y^2+z^2-1}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} yz\, dx \right) dy\,dz = \iint_D yz\left(\sqrt{1-y^2-z^2} - y^2 - z^2 + 1\right) dy\,dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \right) \left(\int_0^1 \rho^2 \left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2 + 1\right) \rho\, d\rho \right)$$

ma visto che $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}(\sin^2\theta)$ si ha che

$$\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = 0 .$$

(iii) Posto $\Sigma_1 := \overbrace{\partial V \cap \{x \geq 0\}}^{\text{semisfera}}$ $\quad \Sigma_2 := \overbrace{\partial V \cap \{x \leq 0\}}^{\text{tronco di paraboloide}}$

~~...~~ si ha che

$$\text{Area}(\partial V) = \text{Area}(\Sigma_1) + \text{Area}(\Sigma_2)$$

$$\text{Area}(\Sigma_1) = 2\pi \quad \text{(si tratta di una semisfera!)}$$

$$\phi(y,z) := \begin{pmatrix} \underbrace{y^2+z^2-1}_{f(y,z)} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$D := \{(y,z) : y^2+z^2 \leq 1\}$$

$$\phi : D \xrightarrow{\sim} \Sigma_2 \qquad \text{Parametrizzazione cartesiana}$$

$$\text{Area}(\Sigma_2) = \iint_D \sqrt{1+|\nabla f(y,z)|^2}\, dy\, dz$$

$$= \iint_D \sqrt{1+4y^2+4z^2}\, dy\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho\, d\theta = 2\pi\left[\frac{1}{12}(1+4\rho^2)^{3/2}\right]_0^1$$

$$= \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)$$

$$\boxed{\text{Area}(\partial V) = 2\pi + \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)}$$

(3B) -(i) Nonostante $\operatorname{rot} \vec{F}_\alpha = \underline{0}$, non possiamo concludere che F_α è conservativo, in quanto il dominio di F_α è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che <u>non è SEMPLICEMENTE CONNESSO</u>

Imponiamo quindi la condizione $\int_\gamma \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{\gamma} = 0$ dove γ è ~~una~~ circonferenza (unitaria) attorno a $(0,0)$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$. Facendo i calcoli otteniamo

$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$

$$\int_\gamma \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t \sin\alpha - \sin^2 t \cos\alpha - \cos^2 t \cos\alpha + \cos t \sin t \sin\alpha)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\cos^2 t + \sin^2 t) \cos\alpha \, dt = -2\pi \cos\alpha$$

Quindi, affinché F_α sia conservativo, è necessario che $\cos\alpha = 0$ ovvero che $\alpha = \alpha_k := \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Per tali valori di α il campo è effettivamente conservativo infatti posto $F_0(x,y) := \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2} \right)$, integrando la prima componente deduciamo che un potenziale per F_0 deve avere la forma

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + u(y)$$

~~Derivando rispetto ad y quest'espressione ottenuta ed imponendo~~ Imponendo che $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ coincida con la seconda componente di F_α otteniamo che $u'(y) = 0$ ovvero $u = \text{cost.}$ pertanto

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + c$$

(ii) Quando k è pari il potenziale di F_{α_k} è

$$U(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

quindi affinché $U(3,0)=0$ si deve avere $c=-\log 3$

Se k è dispari ($\Rightarrow \sin\alpha=-1$) il potenziale di F_{α_k}

è $$U(x,y) = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c;$$

affinché $U(3,0)=0$ si deve avere $c=\log 3$