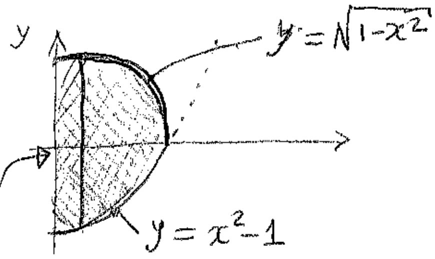
(2A) $\quad V := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^2+z^2-1 \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z^2}\}$

(i) V è il solido ottenuto ruotando questo profilo attorno all'asse delle y



$$\mathrm{Vol}(V) = \iint_D \left(\int_{x^2+z^2-1}^{\sqrt{1-x^2-z^2}} dy \right) dx\,dz \qquad \text{con } D := \{(x,z) : x^2+z^2 \leq 1\}$$

$$= \iint_D \left(\sqrt{1-x^2-z^2} - x^2 - z^2 + 1 \right) dx\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2 + 1\right)\rho\, d\rho\, d\theta$$

$$= 2\pi \left(\int_0^1 \rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho - \int_0^1 \rho^3 d\rho + \int_0^1 \rho\, d\rho \right) = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{7}{6}\pi$$

(ii) Per il thm della divergenza si ha

$$\iint_{\partial V} \vec{F}\cdot\vec{n}_e\, dS = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{F}\, dx\,dy\,dz \qquad \text{dove } \mathrm{div}\,\vec{F} = 3xz+1$$

$$\iiint_V (3xz+1)\,dx\,dy\,dz = \underbrace{3\iiint_V xz\, dx\,dy\,dz}_{\text{Questo vale zero, infatti:}} + \underbrace{\iiint_V 1\, dx\,dy\,dz}_{\text{Questo è Vol(V)} = \frac{7}{6}\pi}$$

$$\iiint_V xz\, dx\,dy\,dz = \iint_D xz\left(\sqrt{1-x^2-z^2} - x^2 - z^2 + 1\right) dx\,dz$$

$$= \left(\int_0^{2\pi} \cos\theta \sin\theta\, d\theta\right)\left(\int_0^1 \rho^2\left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho^2 + 1\right)\rho\, d\rho\right)$$

ma visto che $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}\left(\sin^2\theta\right)$

si ha che $\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \left[\frac{1}{2}\sin^2\theta\right]_0^{2\pi} = 0$

In definitiva $\displaystyle\iint_{\partial V}\vec{F}\cdot\vec{n}_e\,dS = \frac{7}{6}\pi$

(iii) Posto $\Sigma_1 := \partial V \cap \{y \geq 0\}$, $\Sigma_2 := \partial V \cap \{y \leq 0\}$

si ha che $\text{Area}(\partial V) = \text{Area}(\Sigma_1) + \text{Area}(\Sigma_2)$

D'altronde $\boxed{\text{Area}(\Sigma_1) = 2\pi.}$ (si tratta di una semisfera!)

$\phi(x,z) := \begin{pmatrix} x \\ x^2+z^2-1 \\ z \end{pmatrix}$ $\quad D := \{(x,z) : x^2+z^2 \leq 1\}$

$\phi : D \xrightarrow{\sim} \Sigma_2$ è ~~la~~ la parametrizzazione cartesiana di Σ_2

e $\boxed{\text{Area}(\Sigma_2)} = \displaystyle\iint_D \sqrt{1+|\nabla f(x,z)|^2}\,dx\,dz$ $\quad$ con $f(x,z) = x^2+z^2-1$

$$= \iint_D \sqrt{1+4x^2+4z^2}\,dx\,dz = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho\sqrt{1+4\rho^2}\,d\rho$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{12}\left(1+4\rho^2\right)^{3/2}\right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)}$$

$$\boxed{\text{Area}(\partial V) = 2\pi + \frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)}$$

(3A) – (i) Nonostante si abbia $\text{rot}\,\vec{F}_\alpha = \underline{0}$ $\forall\alpha$, non possiamo concludere che $\vec{F}_\alpha$ è conservativo in quanto il dominio di $\vec{F}_\alpha$ è $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, che <u>non è SEMPLICEMENTE CONNESSO</u>.

Imponiamo invece la condizione $\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\gamma} = 0$ dove γ è la circonferenza unitaria centrata in $(0,0)$

$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0, 2\pi]$. Facendo i conti otteniamo che

$$\oint_\gamma \vec{F}_\alpha \cdot d\vec{\gamma} = \int_0^{2\pi} (-\cos t \sin t \cos\alpha - \sin^2 t \sin\alpha - \cos^2 t \sin\alpha + \cos t \sin t \cos\alpha)\, dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \sin\alpha \, dt = -2\pi \sin\alpha$$

Quindi F_α conservativo $\Rightarrow \sin\alpha = 0$ ovvero

$$\alpha = \alpha_k := k\pi \quad \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

Per tali valori di α il campo è effettivamente conservativo. Per esempio, se ~~k~~ k è pari (il caso k dispari è analogo) il campo è $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$. Integrando la prima componente rispetto ad x otteniamo che il potenziale deve essere

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + u(y)$$

Imponendo che $\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)$ coincida con la seconda componente del campo otteniamo $u'(y) = 0$ $\forall y$, ovvero $u \equiv \text{cost.}$ Pertanto

$$U(x,y) = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2) + c$$

(ii) Affinché $U(0,2) = 1$ deve aversi $c = 1 - \log 2$.

NB: Nel caso k dispari (cioè $\cos\alpha = -1$) si avrà che

$$U(x,y) = -\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) + c$$

e dunque affinché $U(0,2) = 1$ dovrà aversi

$$c = 1 + \log 2 .$$