Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II
7 giugno 2014

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:
$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+3x^2+3y^2},$$
e
$$B(R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq R^2\}.$$
   (a) Calcolare $\max_{B(1)} f$ e $\min_{B(1)} f$.
   (b) Calcolare, al variare di $R > 0$, $\iint_{B(R)} f(x,y)dxdy$.
   (c) Detto $B := \lim_{R\to+\infty} B(R)$, dire se converge l'integrale improprio
$$\iint_B f(x,y)dxdy.$$

2. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ il solido definito da
$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq y \leq 4 - x^2 - z^2\}.$$
   (a) Calcolare l'area della superficie ∂D.
   (b) Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x,y,z) := (3z-1, \ 2y+1, \ x)$, calcolare il flusso $\iint_{\partial D} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{dS}$, dove $\mathbf{n}$ denota il versore normale esterno a D.

3. Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata da
$$\begin{cases} x(t) = \cos(3t) \\ y(t) = \sin(2t) \\ z(t) = \cos(2t) \end{cases}$$
e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz-2, \ xz+1, \ xy)$.
   (a) Calcolare $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$.
   (b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.

Università degli studi di Pisa – Corso di Laurea in Ingegneria Biomedica
PROVA SCRITTA di ANALISI MATEMATICA II
7 giugno 2014

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita:

$$f(x,y) = \frac{x+y}{1+2x^2+2y^2},$$

e

$$B(R) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \leq R^2\}.$$

   (a) Calcolare $\max_{B(1)} f$ e $\min_{B(1)} f$.

   (b) Calcolare, al variare di $R > 0$, $\iint_{B(R)} f(x,y)dxdy$.

   (c) Detto $B := \lim_{R\to+\infty} B(R)$, dire se converge l'integrale improprio

$$\iint_B f(x,y)dxdy.$$

2. Sia $D \subset \mathbb{R}^3$ il solido definito da

$$D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ 0 \leq x \leq 9 - y^2 - z^2\}.$$

   (a) Calcolare l'area della superficie ∂D.

   (b) Dato il campo vettoriale $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\mathbf{F}(x,y,z) := (2x, \ 3z, \ 2y)$, calcolare il flusso $\iint_{\partial D} \langle \mathbf{F}, \mathbf{n} \rangle \mathbf{dS}$, dove $\mathbf{n}$ denota il versore normale esterno a D.

3. Sia $\gamma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrizzata da

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) \\ y(t) = \sin(2t) \\ z(t) = \cos(3t) \end{cases}$$

e sia $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ il campo definito da $\mathbf{F}(x,y,z) = (yz, \ xz+2, \ xy-1)$.

   (a) Calcolare $\mathrm{rot}(\mathbf{F})$.

   (b) Calcolare il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ.