Università degli Studi di Pisa- Corso di laurea in Matematica
PROVA SCRITTA di Elementi di Analisi Matematica

del 28 Giugno 2010

1) Dati $\alpha \in \mathbb{R}$ ed $n \in \mathbb{N}$ sia y_n la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y^2+4)\cos(nx) \\ y(0) = \alpha. \end{cases}$$

(i) Per $n \geq 0$ determinare y_n ed il valore $y_n''(0)$.
(ii) Calcolare $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (y_n^2(x)+1)\cos(nx)\,dx$.
(iii) Per $\alpha = 0$ ed $x \in \mathbb{R}$ studiare il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n y_n(x) \Big(\frac{2x}{x^2+2}\Big)^n.$$

2) Sia $g_\lambda : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ definita da

$$g_\lambda(x) := \frac{1}{\cos x} - 1 - \lambda \frac{x^2}{2}$$

(i) Studiare il grafico di g_λ sull'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ nel caso in cui $\lambda = 1$; in particolare provare che per $\lambda = 1$ si ha che

$$g_\lambda(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-\pi/2, \pi/2). \qquad (*)$$

(ii) Calcolare lo sviluppo di Taylor al quart'ordine di g_λ nel punto $x = 0$.
(iii) Determinare $\lambda^* \in \mathbb{R}$ tale che valga la seguente equivalenza:

$$(*) \iff \lambda \leq \lambda^*.$$

3) (a) Dire se il seguenti integrale improprio è convergente ed, in caso affermativo, calcolarlo

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2} dx.$$

(b) Dire per quali valori di $\beta > 0$ risulta convergente l'integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\arctan(\ln^2 x)}{|\beta - x|^e} dx.$$