ANALISI FUNZIONALE - 17 settembre 2008

1) Sia $f \in L^\infty(X)\setminus\{0\}$, $\mu(X) = 1$. Mostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_X |f|^{n+1}\, d\mu}{\int_X |f|^n\, d\mu} = \|f\|_\infty$$

2) Esiste $f \in L^1([0,1])$ tale che

$$\int_0^1 x f(x)\, dx = 1 \quad , \quad \int_0^1 x^n f(x)\, dx = 0 \quad \forall n \geq 2 \; ?$$

3) Su $E := C^0([-1,1]; \mathbb{R})$ si consideri il funzionale

$$\phi(u) := \int_{-1}^1 |u|^2\, dx$$

(a) Mostrare che se F è un sottospazio lineare affine di E, $\phi_{|F}$ ammette al più un punto di minimo.

(b) Mostrare che l'insieme

$$F_1 := \left\{ u \in C^0([-1,1]) \; : \; \int_0^1 u(x)\, dx = \int_{-1}^0 u(x)\, dx + 1 \right\}$$

è un sottospazio chiuso (per $\|\cdot\|_\infty$) di $C^0([-1,1])$.

Calcolare $\inf_{u\in F_1} \phi(u)$ e dire se tale estremo inferiore è anche un minimo.

- ANALISI FUNZIONALE -
4 LUGLIO 2008
prof. Majer

1. Sia $B = \{e_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$ (base di Hilbert canonica).

a) Si provi che B non è debolmente chiuso.

b) Si determini la chiusura debole di B in $\ell^2(\mathbb{N})$.

2. Per $p \in [1,\infty)$ sia $B^p := \{ f \in L^p([0,1]) : \|f\|_p \leq 1 \}$

Sono vere queste uguaglianze fra insiemi?

a) $\overline{\bigcup_{1<p<2} B^p} = B^1$ (ove la chiusura è in $L^1([0,1])$)

b) $\bigcup_{1<p<2} L^p([0,1]) = L^1([0,1])$.

3 Sia $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $A \in \mathcal{B} = \{$boreliani di $\mathbb{R}\}$.

a) Sia, $\forall A \in \mathcal{B}$, $\mu(A) := \int_A f(x)\,dx$.
Si provi che esiste un $A_0 \in \mathcal{B}$ con $|A_0| = 1$ tale che $\mu(A_0) \geq \mu(A)$ $\forall A \in \mathcal{B}$ con $|A| = 1$.

b) Vale lo stesso se μ è una misura finita su $\mathbb{R}$?

3 bis (Alternativo a **3** per chi ha seguito il corso del prof. F. Colombini)

Sia $f \in L^\infty(0,+\infty)$ tale che $\exists \lim_{x\to\infty} f(x) = \lambda$.

Dimostrare che:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy = \lambda$; b) $\lim_{x\to 0} x\int_0^{+\infty} e^{-xy} f(y)\,dy = \lambda$