Terzo appello del
primo modulo
di ANALISI
–18.07.2006–

1. Si vogliono infilare su un filo delle perle distinguibili tra loro solo in base alla dimensione: si hanno a disposizione perle grandi di diametro di 2 centimetri e perle più piccole di diametro di 1 centimetro. Con quanti distinti allineamenti è possibile coprire un filo di 10 centimetri?

   Più in generale mostrare che, se denotiamo con $A(n)$ il numero dei distinti allineamenti di perle (di 1 o 2 centimetri di diametro) che coprono un filo lungo n centimetri, allora c'é una semplice relazione lineare che permette di ricavare $A(n)$ dai termini che lo precedono.

   Sia $0 \le k \le 5$ un intero fissato. Se decidiamo di infilare sul filo di 10 cm k perle grosse rimarrà solo lo spazio per $10-2k$ perle piccole e quindi sul filo verranno infilate $10-k$perle. Pertanto una configurazione sarà determinata specificando in quali dei $10-k$ posti si viene a trovare una perla grossa, il che equivale a selezionare un sottoinsieme di k elementi in un insieme di cardinalità $n-k$; questa operazione può essere fatta in $\binom{10-k}{k}$ modi diversi. Pertanto il numero totale di configurazioni possibili su un filo di 10 cm è

$$A(10) = \sum_{k=0}^{5} \binom{10-k}{k} = 89.$$

   Sia C_n l'insieme delle configurazioni su un filo lungo n cm, possiamo vedere C_n come unione disgiunta di due insiemi $C_n = C_n^o \cup C_n^O$ dove C_n^o denota il sottoinsieme delle configurazioni che terminano con una perla piccola mentre C_n^O denota quello delle configurazioni che terminano con una perla grande. Chiaramene C_n^o è in bigezione con C_{n-1} mentre C_n^O è in bigezione con C_{n-2}

(in entrambi i casi la bigezione si ottiene tagliando il tratto di filo su cui è infilata l'ultima perla) pertanto si ha

$$A(n) = |C_n| = |C_n^o| + |C_n^O| = A(n-1) + A(n-2).$$

Si avrà dunque $A(1) = 1$, $A(2) = 2$, $A(3) = 3$, $A(4) = 5$, $A(5) = 8$, ... abbiamo ritrovato i numeri di Fibonacci!

2. Sia $f(x) := e^{x-1}$ e sia x_n la successione definita per ricorrenza da

$$\begin{cases} x_0 = a \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$$

   (a) Mostrare che x_n è monotona.

   (b) Dire per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ la successione x_n risulta limitata.

Studiamo la funzione $g(x) := e^{x-1} - x$: da $g'(x) = e^{x-1} - 1$ deduciamo che g è decrescente sull'intervallo $]-\infty, 1]$ e crescente sull'intervallo $[1, +\infty[$ dunque $g(x) \geq g(1) = 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e di conseguenza $f(x) \geq x \ \forall x \in \mathbb{R}$ e quest'ultima disuguaglianza implica la crescenza di x_n.

Se $a \leq 1$ x_n è limitata: infatti, visto che $f(]-\infty, 1]) \subset]-\infty, 1]$, è facile verificare per induzione che $x_n \in]-\infty, 1] \forall n \in \mathbb{N}$ e dunque $x_n \in [x_0, 1] \ \forall n \in \mathbb{N}$. Osserviamo inoltre che, per la monotonia, $\sup_{n \in \mathbb{N}} x_n = \lim_{n \to +\infty} x_n := \ell$. Se $\ell < +\infty$ dalla continuit'a di f segue che

$$f(\ell) = f(\lim_{n \to +\infty} x_n) = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{n \to +\infty} x_{n+1} = \ell$$

da segue $\ell = 1$. Da ciò deduciamo che se $x_0 = a > 1$ allora x_n **non** può essere superiormente limitata.

3. Sia $f(x) := (\cos x)^{1/x^2}$.

   (a) Mostrare che f è estendibile per continuità in 0.

   (b) Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale per la funzione così estesa.

Studiamo dapprima la funzione $h(x) = \log f(x) = \frac{\log \cos x}{x^2}$: visto che

$$\log \cos x = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + O(x^6)$$

si ha immediatamente che $h(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{12}x^2 + O(x^4)$ è estendibile per continuità in $x = 0$ e l'origine è punto di massimo per la funzione così estesa. Visto che $f(x) = e^{h(x)}$ dalla crescenza della funzione esponenziale segue che le medesime considerazioni valgono anche per f.

Secondo appello del
secondo modulo
di ANALISI
–18.07.2006–

1. Mostrare che
$$\int_{1/x}^{x} \frac{\arctan s}{s} ds = \frac{\pi}{2} \log x.$$

`Derivando l'espressione` $f(x) = \int_{1/x}^{x} \frac{\arctan s}{s} ds$ `otteniamo`

$$f'(x) = \frac{\arctan x}{x} - \frac{\arctan(1/x)}{(1/x)}(-\frac{1}{x^2}) = \frac{1}{x}[\arctan x + \arctan(1/x)].$$

`Ricordando che` $\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$ `ed osservando che` $f(1) = 0$ `deduciamo che` $f(x) = \frac{\pi}{2} \log x$.

2. (a) Mostrare che l'equazione
$$y'' - y = \frac{1}{e^t + e^{-t}} \qquad (*)$$
ammette al più una soluzione limitata.

   (b) Mostrare che l'equazione (*) del punto precedente ammette una soluzione $y(t)$ tale che $\lim_{|t|\to\infty} y(t) = 0$.

`Le soluzioni dell'equazione omogenea` $v''-v = 0$ `sono del tipo` $v(t) = ae^t+be^{-t}$. `Se` y_1 `ed` y_2 `sono soluzioni limitate dell'equazione non omogenea (*) allora la loro differenza è una soluzione` *`limitata`* `dell'equazione omogenea e di conseguenza è nulla.`

In effetti, applicando il metodo della variazione delle costanti arbitrarie, otteniamo che la generica soluzione dell'equazione ha la forma

$$y(t) = (a + \int_0^t \frac{e^{-s}}{e^s + e^{-s}} ds)e^t + (b + \int_0^t \frac{e^s}{e^s + e^{-s}} ds)e^{-t}.$$

Visto che $\int_0^t \frac{e^{-s}}{e^s+e^{-s}} ds = -\frac{1}{2}\log(\frac{1+e^{-2t}}{2})$ e $\int_0^t \frac{e^s}{e^s+e^{-s}} ds = -\frac{1}{2}\log(\frac{1+e^{2t}}{2})$ affinchè la soluzione sia infinitesima serve che $a = -\frac{1}{2}\log 2$ e $b = \frac{1}{2}\log 2$; in effetti per questa scelta dei parametri $y(t) = -\frac{1}{2}\log(1+e^{-2t})e^t + \frac{1}{2}\log(1+e^{2t})e^{-t}$ ed è immediato verificare che entrambi gli addendi che compongono y sono infinitesimi per $|t| \to +\infty$.

3. Sia $g \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ una funzione 1-periodica.

   (a) Mostrare che per ogni $k \in \mathbb{Z} \setminus (0)$ si ha che

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)e^{ikt} dt = 0.$$

   (b) Più in generale, mostrare che se $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ è 2π-periodica si ha che

   $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)f(t)dt = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right)\left(\int_0^1 g(t)dt\right).$$

(a). Visto che g è 1-periodica conviene riscrivere l'integrale

$$\begin{aligned}
\int_0^n g(t)e^{ikt}dt &= \sum_{h=0}^{n-1} \int_h^{h+1} g(t)e^{ikt}dt \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \int_0^1 g(t+h)e^{ik(t+h)}dt \\
&= \sum_{h=0}^{n-1} \int_0^1 g(t)e^{ikt}e^{ikh}dt = \frac{1-e^{iknh}}{1-e^{ikh}} \int_0^1 g(t)e^{ikt}dt
\end{aligned}$$

È evidente che questa quantità è limitata, pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)e^{ikt}dt = 0.$$

(b). Supponiamo ora, per semplicità, che f sia a media nulla. Dato $\epsilon > 0$, è possibile trovare un polinomio trigonometrico (a media nulla) σ tale che $\|\sigma - f\|_\infty < \epsilon$; possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \int_0^n g(t) f(t) dt \right| &\leq \left| \frac{1}{n} \int_0^n g(t)\sigma(t) dt \right| + \left| \frac{1}{n} \int_0^n g(t) |f(t) - \sigma(t)| dt \right| \\ &\leq \left| \frac{1}{n} \int_0^n g(t)\sigma(t) dt \right| + \epsilon \|g\|_\infty \end{aligned}$$

Dal punto (a) segue che $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)\sigma(t)dt = 0$, pertanto si avrà che $\left|\frac{1}{n} \int_0^n g(t)f(t)dt\right| < \epsilon(1 + \|g\|_\infty)$ definitivamente, e di conseguenza, visto che ϵ è arbitrario, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n g(t)f(t)dt = 0$. Il caso in cui f non abbia media nulla si tratta semplicemente scrivendo $f(t) = \hat{f}_0 + (f(t) - \hat{f}_0)$: il primo pezzo è costante mentre il secondo ha media nulla e la tesi segue immediatamente.