Analisi Matematica II - Primo Compitino
27 Marzo 2006

Esercizio 1. Determinare una primitiva della funzione

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(x-1)}$$

sull'intervallo $]0,1[$ e dire se tale primitiva è estendibile con continuità agli estremi.

`Visto che` $f(x) \sim x^{-1/2}$ `(per` $x \to 0^+$`)` f `è integrabile in senso improprio sugli intervalli del tipo` $[0,x]$ `(`$x \in [0,1[$`). Una primitiva e' data da`

$$F(x) := \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t}(t-1)} dt = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{2}{s^2-1} ds = \int_0^{\sqrt{x}} [\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1}] ds = \log \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}.$$

`(dove si è effettuata la sostituzione` $x = t^2$`). È evidente che` $\lim_{x \to 1^-} F(x) = -\infty$ `e dunque` F `non puó essere estesa nel punto 1.`

Esercizio 2. Sia $L(\lambda)$ la lunghezza dell'ellisse parametrizzata dalle equazioni

$$\begin{cases} x = (1+\lambda)^{1/4} \cos t, \\ y = (1+\lambda)^{-1/4} \sin t, \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Determinare tre numeri a, b, c tali che

$$L(\lambda) = a + b\lambda + c\lambda^2 + o(\lambda^2), \quad \text{per } \lambda \to 0.$$

Dire se 0 è punto di massimo o minimo locale della funzione L.

`Applicando la formula per calcolare la lunghezza di una curva si ottiene`

$$L(\lambda) = \int_0^{2\pi} \left[(1+\lambda)^{1/2} \sin^2 t + (1+\lambda)^{-1/2} \cos^2 t\right]^{1/2} dt = (1+\lambda)^{-1/4} \int_0^{2\pi} [1+\lambda \sin^2 t]^{1/2} dt$$

Ricordando che $(1+y)^\alpha = 1 + \alpha y + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} y^2 + o(y^2)$ e che

$$\int_0^\pi \sin^2 t \ \ dt = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi \sin^4 t \ \ dt = \frac{3}{8}\pi$$

ricaviamo che

$$L(\lambda) = [1 - \frac{\lambda}{4} + \frac{5}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)] \cdot [2\pi + \frac{\pi}{2}\lambda - \frac{3\pi}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)] = 2\pi + \frac{3\pi}{32}\lambda^2 + o(\lambda^2)$$

Dalla formula precedente si deduce che $\lambda = 0$ è minimo locale per L.

Esercizio 3. Sia

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt.$$

(a) Dire per quali $\mu \in \mathbb{R}$ la funzione

$$F(x) - \frac{\mu}{x} e^{-x^2}$$

ha massimo su $]0, +\infty[$.

(b) Calcolare

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x^2} F(x), \qquad \lim_{x \to +\infty} x e^{x^2} F(x).$$

(a) Utilizzando il TFdCI

$$\frac{d}{dx}\left[F(x) - \frac{\mu}{x} e^{-x^2}\right] = e^{-x^2}[\frac{\mu}{x^2} + 2\mu - 1].$$

Affinchè ci sia un massimo questa derivata deve annullarsi, ciò può avvenire solo se $\mu \in]0, 1/2[$; per tali valori di μ si ha che effettivamente la derivata è positiva sull'intervallo $]0, \sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}[$ mentre è negativa su $]\sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}, +\infty[$, quindi la funzione ha massimo in $x = \sqrt{\frac{\mu}{1-2\mu}}$.

(b) Usando il cambio di variabile $t = x + s$ otteniamo che

$$F(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2xs} ds$$

da cui segue che

$$0 \leq e^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \int_0^{+\infty} e^{-2xs} ds = \frac{1}{2x} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty.$$

Dunque, per il teorema dei due carabinieri il primo limite è zero.

Per quanto riguarda il secondo limite osserviamo che, integrando per parti,

$$xe^{x^2} F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-s^2} x e^{-2xs} ds = \left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} - \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds$$

D'altro canto

$$\left[-\frac{1}{2} e^{-s^2} e^{-2xs} \right]_{s=0}^{s=+\infty} = \frac{1}{2}, \qquad 0 \leq \int_0^{+\infty} s e^{-s^2} e^{-2xs} ds \leq \frac{M}{2x} \to 0 \qquad \text{per } x \to +\infty$$

con $M := \max\{se^{-s^2},\ s \geq 0\}$. Pertanto il secondo limite vale $1/2$.