Soluzione Compito Analisi I - 10 gennaio 2006

Esercizio 1.

1. In quanti modi possiamo distribuire 60 caramelle tutte uguali tra 30 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 1 oppure 4?

2. In quanti modi possiamo distribuire 30 figurine tutte diverse tra 30 bambini in modo che ciascun bambino ne abbia 0 oppure 3?

(a) Detto n rispettivamente m il numero di bambini con 1 rispettivamente 4 caramelle, si deve avere $n+m=30$ e $n+4m=600$, da cui $n=20$ e $m=10$. Quindi 10 bambini fortunati avranno 4 caramelle, mentre gli altri 20 ne avranno solamente una. I modi con cui si può effettuare la distribuzione sono quindi tanti quanti sono i sottoinsiemi di 10 elementi (i fortunati) di un insieme di 30 elementi (tutti i bambini), cioè $\binom{30}{10}$.

(b) Come prima, 10 bambini riceveranno 3 figurine, mentre i rimanenti 20 non ne riceveranno alcuna. Ci sono $\binom{30}{10}$ possibili sottoinsiemi di 10 fortunati, e per ciascun sottoinsieme dobbiamo calcolare il numero di modi di distribuire le 30 figurine ai bambini del sottoinsieme. Si tratta cioè di calcolare il numero delle *partizioni ordinate* di un insieme I_{30} di 30 elementi composte da 10 sottoinsiemi di 3 elementi. A ciascuno dei $30!$ ordinamenti di I_{30} possiamo associare una partizione ordinata raggruppando i primi tre elementi, poi i secondi tre, e cosí via. Otteniamo cosí tutte le possibili partizioni ordinate, ma ciascuna di esse viene contata più volte, poiché possiamo permutare i primi tre elementi tra loro, i secondi tre, e cosí via. Si hanno cioè $(3!)^{10}=6^{10}$ ripetizioni, quindi il numero delle partizioni ordinate in questione è $30!/6^{10}$. Concludiamo che il numero dei modi richiesto è

$$\binom{30}{10}\frac{30!}{6^{10}}.$$

Esercizio 2. Determinare l'insieme dei numeri complessi z tali che la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i-z)^n}{z^n}$$

risulti convergente. Per tali z calcolare la somma della serie.

Soluzione. Ponendo $w=(i+z)/z$, la serie risulta una serie di potenze in w,

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n.$$

Dato che $\sqrt[n]{n}\to 1$, questa serie ha raggio di convergenza 1. Inoltre non converge in alcun punto del bordo del disco di convergenza: se $|w|=1$ la successione

nw^n non è limitata. Quindi la serie data converge per tutti e soli gli $z \in \mathbb{C}$ tali che $|(i-z)/z| < 1$. Equivalentemente, $|i-z|^2 < |z|^2$, ossia

$$(\operatorname{Re} z)^2 + (1 - \operatorname{Im} z)^2 < (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2,$$

cioè $\operatorname{Im} z > 1/2$. Quindi la serie data converge se e solamente se z appartiene al semipiano aperto

$$\{z \in \mathbb{C} \,|\, \operatorname{Im} z > 1/2\}.$$

Derivando per serie, si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} nw^n = w \sum_{n=0}^{\infty} nw^{n-1} = wD\left(\sum_{n=0}^{\infty} w^n\right) = wD\frac{1}{1-w} = \frac{w}{(1-w)^2},$$

per $|w| < 1$. Quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\frac{(i-z)^n}{z^n} = \frac{i-z}{z}\left(1 - \frac{i-z}{z}\right)^{-2} = \frac{z(i-z)}{(2z-i)^2}.$$

Esercizio 3. Dato l'intero $n \geq 2$, si consideri l'equazione

$$(1+n^2)\sin x = n^2 x. \tag{1}$$

1. Dimostrare che (1) ha un'unica soluzione positiva x_n.
2. Dimostrare che la successione (x_n) è decrescente ed infinitesima.
3. Determinare il numero reale α tale che

$$x_n = \frac{\alpha}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{per } n \to \infty.$$

(a) Consideriamo la funzione $f(x) = (\sin x)/x$, prolungata per continuità ponendo $f(0) = 1$. Si tratta di dimostrare che esiste un unico $x_n > 0$ tale che $f(x_n) = n^2/(n^2+1)$. Per $x \geq \pi$ si ha

$$f(x) \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\pi} < \frac{1}{3}$$

Dunque $f(x) = n^2/(n^2+1)$ non ammette soluzioni per $x \geq \pi$ perchè $n^2/(n^2+1) \geq 1/2$ per ogni $n \geq 1$. La funzione f è continua, vale 1 in 0 e 0 in π, quindi il teorema degli zeri ci garantisce che esiste $x_n \in]0,\pi[$ tale che $f(x) = n^2/(n^2+1)$. La derivata di f è

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\sin x}{x}\left(\operatorname{cotan} x - \frac{1}{x}\right).$$

Se $x \in]0, \pi[$, $(\sin x)/x$ è positivo e $\operatorname{cotan} x - 1/x$ è negativo (segue dal fatto che $\tan x > x$ in $]0, \pi/2[$). Quindi $f' < 0$ in $]0, \pi[$, da cui f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, ed il punto dove f vale $n^2/(n^2+1)$ è unico.

(b) Per quanto visto sopra la funzione f è strettamente decrescente in $[0, \pi]$, e l'immagine di tale intervallo è $[0, 1]$. Detta g l'inversa di f in tale intervallo, g è ancora strettamente decrescente. La successione $\frac{n^2}{n^2+1}$ cresce strettamente ed ha limite 1, da cui $x_n = g(\frac{n^2}{n^2+1})$ decresce strettamente ed ha limite $g(1) = 0$.

(c) Usando lo sviluppo $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$ per $x \to 0$, l'identità $f(x) = n^2/(n^2+1)$ implica

$$1 - \frac{x_n^2}{6} + o(x_n^2) = 1 - \frac{1}{n^2+1},$$

per $n \to \infty$.

$$x_n^2 = (\frac{6}{n^2+1})(1 + o(1)) = (\frac{6}{n^2})(1 + o(1)) =$$

per $n \to \infty$. Sapendo che $x_n > 0$ ciò ci permette di concludere che $\alpha = \sqrt{6}$.