ALCUNI ESERCIZI

1. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 1 - y^2 + \mathrm{e}^{-t^2} \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Si dica se sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy-Lipschitz.

   (b) Si mostri che la soluzione massimale del problema di Cauchy é definita su tutto $\mathbb{R}^+$.

   (c) Detta y la soluzione massimale si dica se esiste $\lim_{t\to+\infty} y(t)$ e, nel caso esista, lo si calcoli.

2. Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale $u'' - u = 1/t$ definite sull'intervallo $(0, +\infty)$. Dire se esistono soluzioni di questa equazione tali che che $\lim_{t\to\infty} u(t) = 0$ e, nel caso, determinarle.

3. Si consideri il problema di Cauchy

$$(C_\alpha) \quad \begin{cases} \dot{u} = f(t, u) \\ u(0) = \alpha \end{cases}$$

   con $f \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ tale che $f(t + 1, x) = f(t, x) = f(t, x + 1)$.

   (a) Si mostri che sono verificate le ipotesi del teorema di Cauchy–Lipschitz; inoltre detta u_α la soluzione massimale di (C_α) si mostri che essa è definita su tutto $\mathbb{R}$.

   (b) Si calcoli $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{u_\alpha(t)}{t^2}$

   (c) Dire se, in generale, u_α verifica le seguenti proprietà:

$$(*) \;\; u_{\alpha+1}(t) = u_\alpha(t) + 1 \qquad\qquad (**) \;\; u_\alpha(t + 1) = u_\alpha(t)$$

   (d) Si mostri che le soluzioni di (C_α) o sono limitate per ogni valore $\alpha \in \mathbb{R}$ oppure sono tutte illimitate.

   (e) Si mostri che se f è solo continua allora il punto (d) non vale: si descrivano le soluzioni nel caso $f(t, x) = \sqrt{|\sin(\pi x)|}$.

4. Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \log(y + t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

   (a) Si mostri che la soluzione massimale di tale problema è definita per ogni $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Si calcolino

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{e}^{-t} y(t), \qquad \lim_{t\to-\infty} \frac{y(t)}{t}$$

5. Si consideri l'equazione differenziale lineare

$$y'' + 2\epsilon y' + (1 + \epsilon^2)y = f(t) \qquad (E_\epsilon)$$

   (a) Si trovino le soluzioni dell'equazione nel caso $f(t) = 0$.

   (b) Nel caso $f(t) = \sin t$ si determini esplicitamente la soluzione y_ϵ di (E_ϵ) che soddisfa le condizioni iniziali $y_\epsilon(0) = 0$, $y'_\epsilon(0) = 0$.

(c)* Si mostri che se $\epsilon \to 0$ allora y_ϵ converge puntualmente a y_0 e la convergenza è uniforme su ogni intervallo limitato.

6. Si consideri il sistema lineare omogeneo $\dot{u} = Au$ dove A è la matrice simmetrica definita da

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) Si trovi la matrice di transizione e^{tA} del sistema e ne si determini il determinante.

(b) Si risolva l'equazione non omogenea $\dot{u} = Au + f(t)$ dove $f(t) = (-1, t, 1-t)$.

7. Sia $I \subset \mathbb{R}$ e sia $A \in C^0(I, \mathcal{L}(R^n))$ tale che

$$\forall t \in I \quad A(t) + A^{^T}(t) = 0 \quad \text{(cioè A(t) antisimmetrica } \forall t \in I)$$

Detta $W(t,s)$ la matrice di transizione relativa al sistema $\dot{\mathrm{x}} = a(t)\mathrm{x}$, mostrare che

$$W(t,s)W^{^T}(t,s) = I \ \forall t,\ s \in I \quad \text{(cioè W(t,s) ortogonale } \forall t,\ s \in I)$$

8. Provare che $\forall x > 0$ l'equazione

$$(1+x)e^y = xy^2$$

ammette una unica soluzione $y \in \mathbb{R}$.

Si studi la soluzione $y = y(x)$ come funzione della variabile x.

9. Si determini la distanza minima del punto $(3,0)$ dall'insieme $\{y = x^2\}$.

10. Si mostri che per ogni numero reale x vi è un unico $y = y(x) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\log(x+y) + xy = 0.$$

Si studi la funzione $y(x)$ così determinata, discutendone la regolarità e l'andamento asintotico per $x \to +\infty$. Quanto vale $y(y(x))$?

11. Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie definita da

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

(a) Si calcolino

$$\inf_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) \qquad\qquad \sup_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z)$$

per $f(x,y,z) = \mathbf{e}^{(x-2)^2+y^2+z^2}$.

(b) Si mostri che se $f \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ è una funzione convessa non costante allora $\sup_{(x,y,z)\in S} f(x,y,z) = +\infty$.

(c)* Si mostri che se $f \in C^1(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ è una funzione convessa e $Q \in S$ è un punto di massimo locale per $f_{|S}$ allora f è costante in un intorno del punto Q.

12. Sia $u \in C^2(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Dimostrare che se sia u che il suo quadrato u^2 sono funzioni armoniche allora u deve essere costante.