Primo appello d'esame del terzo modulo di

ANALISI

–16.06.2005–

1. Studiare la convergenza della serie di funzioni
$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^2 e^{-kx^2},$$
Dire in particolare se la serie é puntualmente, uniformemente o normalmente convergente.

2. Sia $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - xyz$. Determinare massimi e minimi di f sul simplesso
$$\Delta := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \; : \; x+y+z = 1, \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; z \geq 0\}.$$

3. Sia $\mathrm{z}(t) := (x(t), y(t))$ una soluzione del sistema
$$\begin{cases} x' = -x + 2y + y^2 \\ y' = x - 5y + x^2 \end{cases}$$
   (i) Mostrare che esiste $r_0 > 0$ tale che se $|\mathrm{z}(0)| \leq r_0$ allora $|\mathrm{z}(t)| < r_0$ per ogni $t \geq 0$.

   (ii) Provare che scegliendo $r_0 = 1$ nel punto precedente esiste $\alpha > 0$ tale che $|\mathrm{z}(t)| \leq e^{-\alpha t}$ per ogni $t \geq 0$; mostrare che si può prendere $\alpha = 1/50$.

   [Suggerimento: provare che, se α è sufficientemente piccolo e $|\mathrm{z}(0)| \leq 1$, $\rho(t) := (x^2(t) + y^2(t))e^{2\alpha t}$ è una funzione decrescente per ogni $t \geq 0$.]