Pianeta Galileo
2020

MA SERVONO DAVVERO I NUMERI REALI?

FABRIZIO BROGLIA

Indice

1. A mo' di introduzione.

I numeri reali sono una classe di numeri che alla fine delle scuole superiori gli studenti pensano di dare per acquisita ma, almeno nella mia esperienza, la cosa non è così vera. Contrariamente a quanto dimostrano poi sul campo, gli studenti, in particolar modo se provenienti dal liceo scientifico, pensano di conoscere bene i numeri reali e ci si trovano perfettamente a loro agio; basta però cambiare di un nonnulla le carte in tavola, come ad esempio in un contesto di algebra lineare chieder loro di limitarsi al campo dei razionali, per creare immediatamente insicurezze e sensi di disagio.

In effetti all'inizio dei miei corsi di Analisi 1 una delle domande ricorrenti è stata "Che cosa sono i numeri reali?" e le risposte che ottenevo erano un po' strane, per non dire del tutto scoraggianti, anche perché evidenziavano curiosi percorsi di apprendimento.

Una riprova che le persone considerano di dominare questa nozione l'ho avuta una volta che chiesi di disegnare la circonferenza di equazione $x^2+y^2=2$ in un piano fatto di punti aventi solo coordinate razionali ed uno dei presenti, cercando di trovare le intersezioni con gli assi, disse *" Non vale: vedo la soluzione ma lei me la ha tolta".* Considero questa risposta molto significativa: lo studente dava per acquisita l'esistenza di $\sqrt{2}$ ma non sapeva come trarsi d'impaccio dalla questione.

In effetti uno degli obiettivi di questo incontro è proprio di cercare di focalizzare l'attenzione su cose che per tutti noi sono molto usuali, o almeno così ci sembrano, al punto di considerarle scontate o banali e di conseguenza per varie ragioni, magari perché le consideriamo troppo semplici o al contrario troppo difficili, noi insegnanti cediamo talvolta alla tentazione di trascurare di trasmetterle agli studenti con la dovuta attenzione, correndo, forse, il rischio di creare un vuoto culturale, cioè di rinunciare a introdurre forme di pensiero o modi di ragionare astratti, anche se questi affondano le loro radici nel passato.

Un punto di partenza per introdurre i numeri reali può essere quello di rifarsi al mondo dei greci e al loro gusto per la riflessione teorica che li portò alla scoperta dell'incommensurabilità, in particolare di quella del lato e della diagonale del quadrato, cosa che mise in crisi i fondamenti di una concezione del mondo che vedeva tutto come proveniente da un armonico assembramento di particelle elementari.

Ma prima facciamo un passo indietro e, magari senza arrivare a porsi il problema di *che cosa sia un numero,* cosa che a priori può sembrare un po' vaga e che rischia quantomeno di portarci un poco troppo lontano nella riflessione filosofica, possiamo almeno porci la domanda, sicuramente meno generica, *a che cosa servano i numeri.*

Poiché personalmente penso che gli oggetti della matematica siano stati inventati, o se si preferisce "costruiti", dall'uomo per risolvere problemi che incontrava via via nel corso del suo cammino, forse sarebbe ancora più focalizzante riformulare ulteriormente la domanda chiedendosi

che tipo di problemi posso risolvere con una certa classe di numeri?

Ad esempio i numeri naturali permettono di contare cose ben distinte come patate[1], uova o persone in una nave e in effetti si riscontrano da un bel numero di anni, circa 35000,

[1] Approfitto per fare una osservazione molto banale. Se ho un mucchio di patate, per sapere quante ce ne siano nel mucchio non debbo fare altro appunto che contarle e analogamente per sapere quante ce ne siano in un altro mucchio vicino. Ma se unisco i due mucchi non debbo ricontare le patate daccapo: mi basta *sommare* i due numeri interi che avevo. Potremmo dire che qui si inizia a *fare matematica.*

mentre i numeri razionali aiutano per esempio a spartire una torta e se ne trova traccia anche nella preistoria.
Lo zero risolve il problema di parlare del nulla (Mesopotania 300 a.C.) mentre i numeri negativi aiutano a parlare dei debiti, e quindi di sottrazioni come di patate da togliere da un mucchio (100 a.C.).
Con l'avanzare delle conoscenze, anche le esigenze di contare si sono fatte sempre più raffinate: ad esempio (800-500 a.C.) volendo misurare lunghezze sempre più complicate, come quella di una circonferenza di dato raggio o la diagonale di un quadrato, ci si accorse che i razionali non bastavano più.
Infatti se si usano solo classi di numeri come gli interi o i razionali per misurare ad esempio grandezze geometriche si suppone implicitamente che due grandezze geometriche ammettano sempre un sottomultiplo comune, cosa appunto negata dalla scoperta deall'esistenza di grandezze incommensurabili.
Vediamo la cosa più da vicino. Due grandezze g_1 e g_2, pensate come omogenee, le diciamo *commensurabili* se sono entrambe multiple intere di una stessa grandezza, cioè se esiste una grandezza u tale che $g_1 = mu$ e $g_2 = nu$ con m e n interi. Praticamente due grandezze sono commensurabili se e solo se il loro rapporto è razionale.
Ora dati due numeri interi m, n, tramite l'algoritmo euclideo è facile vedere che esiste sempre un numero di cui sono entrambi multipli interi e questo numero è detto il *Massimo comun Divisore* di m e n. In effetti operando la divisione euclidea tra il più grande (diciamo m) e il più piccolo n otteniamo

$$m = qn + r$$

con $r < n$.
Se $r = 0$ abbiamo finito, il massimo comun divisore è n, altrimenti possiamo continuare ripetendo questa operazione tra n e r, ottenendo

$$n = q_1 r + r_1$$

con $r_1 < r$. Se $r_1 = 0$ allora r divide n e quindi divide anche $m = qq_1 r + r = kr$.
Se $r_1 \neq 0$ possiamo ripetere l'operazione ancora una volta dividendo r per r_1

$$r = q_2 r_1 + r_2$$

con $r_2 < r_1$. Ancora, se $r_2 = 0$ abbiamo finito poiché r_1 divide r e quindi divide n e quindi divide m. Altrimenti continuiamo ad applicare l'algoritmo.
Poiché ad ogni passo il resto è minore del divisore si ha che la successione dei resti verifica

$$n > r > r_1 > r_2 > \ldots > r_n$$

cioè la successione dei resti è una successione decrescente di numeri interi positivi, quindi dopo un numero finito di passi si ha che l'ultimo resto è 0 e l'ultimo resto diverso da 0 è il massimo comun divisore. Maggiori dettagli sono nell' Appendice A.
Un esempio di uso di questa procedura di divisione con resto lo troviamo quando vogliamo imbottigliare il vino di una damigiana da 50 litri in bottiglie di tipo bordolese che contengono 0,75 litri. Ma la divisione euclidea è in uso anche in parecchie moderne procedure: basti pensare all'arrangiamento di un testo in un qualsiasi word processor.
Un situazione diversa si sarebbe creata se avessi potuto suddividere la mia unità di misura, la mia bordolese, come invece posso fare ad esempio con una asta di legno; per misurare la distanza tra due punti A e B in termini numerici posso prendere un bastone e vedere

quante volte debbo ripetere il bastone per ricoprire la distanza tra A e B: se riesco a coprire tale distanza in questo modo ho finito e posso dire che la distanza tra A e B è *tot* volte la lunghezza del bastone, altrimenti, se resta un avanzo, cioè una distanza più piccola della lunghezza del bastone, posso dividere il bastone in un numero di parti eguali, ad esempio 10, e ripetere il procedimento con il bastoncino più piccolo. Se termino posso dire che la distanza misura m volte la lunghezza del bastone + n volte la lunghezza $\frac{1}{10}$ del bastone. Se no, divido ancora in dieci parti e così via.
Il problema che nasce in questo caso è se il processo che ho messo in piedi a un certo punto si arresti o meno.
Detto in termini più tecnici, la divisione euclidea, la divisione con il resto, ci permette di misurare molte cose ma non è detto che il procedimento abbia un termine, e quindi che riesca sempre: ci possono essere cose che non riesco a misurare con questo metodo, con questo algoritmo, se non faccio un minimo di attenzione.
Ad esempio, tramite il teorema di Talete è molto semplice prendere una lunghezza e dividerla in 3 parti: se ora applico il procedimento di prima per misurare questa lunghezza in termini della lunghezza iniziale e delle sue successive divisioni in 10 parti non arrivo ad un procedimento finito.
Posso però ovviare a questo inconveniente dividendo il bastone non in 10 ma in 3 parti uguali: detta U la lunghezza di questo pezzetto, avrei avuto appunto che la lunghezza del bastone iniziale era $3U$ e quella del pezzetto U: cioè trovavo una grandezza U tale che sia il bastone che il pezzetto erano multipli di questa grandezza, cioè che le due grandezze erano *commensurabili* .
Posso essere più astuto e operare in modo diverso: dopo il primo passo posso usare la lunghezza del pezzo restante per misurare con lei la lunghezza del bastone; se il procedimento si arresta ho alla fine che ho trovato una lunghezza l, quella del pezzo restante, tale che sia la lunghezza del bastone che la distanza AB sono multipli di l. Se il procedimento non termina con il primo passo, posso ricominciare con il pezzetto che resta e continuare sperando che ad un certo punto il procedimento termini. Capite immediatamente che non stiamo facendo altro che la ricerca del Massimo Comun Divisore tramite l'algoritmo euclideo della divisione con resto.
Il processo sopra descritto è il processo che i pitagorici usavano per arrivare alla determinazione di una possibile grandezza in comune tra due grandezze pensate come lunghezze di due segmenti. Si prende il segmento più corto e si ricopre quello più lungo con tante copie di quello più corto: se si arriva a ricoprirlo si finisce altrimenti si prende il segmento rimanente e si cerca di ricoprire il più corto con tante copie di quest'ultimo. Anche qui se ci si riesce si termina altrimenti si ricomincia. Il punto fondamentale era che per i pitagorici questo procedimento avrebbe dovuto sempre terminare e questo è praticamente equivalente alla commensurabilità.
La scoperta dell'esistenza di grandezze come ad esempio le lunghezze del lato e della diagonale del quadrato che sono *incommensurabili*, cioè tali che non esiste alcuna lunghezza *"sottomultiplo comune"*, dava una scossa proprio a questa concezione [2] e quindi, usando

[2] Anticipiamo qui, per comodità del lettore, il ragionamento sviluppato nella Proposizione 2.1. Se la diagonale del quadrato di lato l, che misura per il teorema di Pitagora $d = \sqrt{l^2 + l^2}$, fosse commensurabile con il lato l, si avrebbe $d = mu, l = nu$ da cui $m^2u^2 = 2l^2 = 2n^2u^2$ da cui $2n^2 = m^2$. Possiamo assumere, cambiando u che m, n siano coprimi tra loro. Da $2n^2 = m^2$ si ha

classi di numeri come gli interi o i razionali [3] per misurare queste grandezze si perviene ad una contraddizione: da cui l'insufficienza della classe dei numeri razionali e la necessità di una classe di numeri più vasta.
Tornando al problema di misurare, inteso quindi come l'associare ad una classe di oggetti in un certo insieme dei numeri (a questo punto, non meglio precisati), vediamo intanto che proprietà è necessario che abbia la classe di numeri che stiamo cercando.
Continuiamo con l'esempio del misurare delle figure piane, di sottoinsiemi cioè del piano: per prima cosa devo supporre che le figure che voglio misurare siano,anche qui in un senso da precisare meglio, *omogenee* rispetto alla misura e che i valori che ottengo come misura si possano sommare ed eventualmente moltiplicare tra loro, cioè che nel mio insieme di numeri si possa operare con le usuali regole dell'aritmetica.
Ma ho bisogno di qualche cosa di più: se voglio scomporre una figura in figure semplici e poi riottenere la figura di partenza come riunione dei pezzi in cui l'ho divisa (si pensi ad esempio ad un cerchio ottenuto come unione di quadratini) c'è l'eventualià che tale unione non sia finita e quindi nel mio insieme devo poter fare *somme infinite di numeri.*
E questo è un problema serio, perché non è per niente ovvio a priori che cosa ciò significhi; la difficoltà di concepire il fatto che quantità finite possano essere somme di infiniti termini ci riporta di nuovo al V secolo a.C. perché questo è esattamente il paradosso di Zenone di Achille e la tartaruga. Occorre anche spiegare che cosa si intenda per somma infinita, cioè occorre una *definizione* di somma infinita e soprattutto occorre un ambiente ove ciò si possa fare.
Questo è uno degli aspetti che portò alla sistematizzazione dei numeri reali avvenuta nella seconda metà dell'800, sistematizzazione che ha messo un poco di ordine nell' universo dei numeri: anche se a scopo divulgativo siamo partiti legando l'introduzione dei reali ad una corretta definizione di entità come $\sqrt{2}$, cioè legando tale classe di numeri alla incommensurabilità, indubbiamente una forte spinta fu quella di dare fondamento ad una altra grande invenzione: la continuità. Provate a pensare la nozione di continuità, che è fondata su quella di limite, senza una chiara nozione di che cosa sia l'insieme su cui essa si basa e delle operazioni che in esso si possono fare. Probabilmente per Cauchy (1789-1857) l'idea di continuità per una funzione era vicina all'idea di poterne disegnare il grafico senza alzare la matita dal foglio, cosa che attirava le critiche del contemporaneo Gauss (1777-1855). In fondo il concetto di limite stesso può esser visto proprio come una operazione (non finit-aria) su questo insieme ma su questo si tornerà più avanti.
Ma continuiamo con l'idea di misurare. Una volta una persona mi domandò: quanti numeri esistono? intendendo con questo quanti *tipi* di numeri esistono e mi venne di rispondere: tutti quelli che ci servono per misurare le cose che vogliamo misurare.
A questo punto, elencate delle motivazioni, iniziamo con il richiamare la descrizione della classe dei numeri reali, cercando di evidenziarne pregi e difetti. Ci sono molti modi di costruire tale classe partendo da quella dei razionali, seguendo ad esempio le idee di Cauchy, Cantor, Dedekind e altri ancora, evidenziando in definitiva di volta in volta

---

che m^2 è pari e quindi che anche m lo è, e di conseguenza che anche n^2 e quindi n è pari, contro l'assunzione iniziale che fossero coprimi.

[3] Si osservi che anche per i razionali, se $r = \dfrac{m}{p}$ e $s = \dfrac{n}{q}$ sono due razionali e $d = MCD(mq, np)$, da $mq = hd$ e $np = kd$ si ha $r = hu$ e $s = ku$ con $u = \dfrac{d}{pq}$.

proprietà differenti, come connessione, completezza o compattezza. In queste note viene privilegiato l'approccio di Dedekind per varie ragioni, non ultima quella che secondo me è un bell'esempio di "noce di Grothendieck" [4]: per risolvere un problema, come quello di una corretta fondazione della continuità, si è creato un ambiente in cui tale problema trova soluzione.
In definitiva siamo partiti dall'esigenza di contare cose ben delimitate (patate) e siamo arrivati, sulla spinta anche di dar fondazione ad un concetto abbastanza raffinato come la continuità, alla necessità di una classe di numeri abbastanza complicata: oggi sappiamo che tramite questa classe riusciamo a fare cose meravigliose, come misurare lunghezze di curve definite da funzioni non troppo bizzarre, misurare aree di zone racchiuse da contorni abbastanza generali. Una volta ampliata questa classe con i numeri complessi [5] di nuovo potremmo chiederci se con questa classe siamo in grado di misurare tutto quello che ci occorre, di soddisfare ogni nostra esigenza. Vedremo che ci sono cose ben definite che non sappiamo misurare, o meglio che *non possono essere misurate* limitandoci alla classe dei numeri reali o complessi e quindi per tali scopi occorrerà cercare altre classi. Ritorneremo verso la fine su questo quando parleremo di infinitesimi.
Come detto fin dall'inizio, stiamo solo richiamando temi ben noti che ci sembrano forse trascurati mentre potrebbero fornire anche spunti di collaborazione interdisciplinare ad esempio tra il corso di filosofia quando affronta la filosofia greca e quello di matematica e forse potrebbero fornire materiale per una migliore comprensione di entrambi i soggetti essendo al tempo dei greci le due cose strettamente collegate e anche una introduzione al pensiero o meglio al modo di ragionare astratto.
Prima di entrare più nel merito, forse val la pena, senza soffermarcisi troppo, di fare due ultime considerazioni banali: una è l'aiuto del simbolismo: pensate ad esempio di fare una moltiplicazione in cifre romane e l'altra è a proposito delle date delle fondazioni delle varie classi di numeri: circa il 1300 per i complessi, seconda metà dell'ottocento per i reali e inizio del novecento per gli interi (Peano).

2. I Reali: un approccio quasi assiomatico.

2.1. **Primi passi.** Per introdurre la classe dei numeri reali seguiamo tra i vari metodi l' approccio astratto che si rifà a Dedekind, ancorché anche egli, almeno a suo dire, probabilmente altro non fece che evidenziare le idee già espresse nel mondo greco, rifacendosi al metodo per confrontare due grandezze detto di esaustione e al principio di Eudosso, che per comodità di chi legge riportiamo qui di seguito utilizzando terminologie più moderne.
Pricipio di Eudosso. Diremo che due grandezze a e b sono nella stessa *proporzione* di altre due grandezze A e B se comunque fissati due numeri interi positivi m e n si ha

$$ma < nb \text{ se e solo se } mA < nB$$

$$ma > nb \text{ se e solo se } mA > nB$$

[4] l'espressione fa riferimento ad una frase di Grothendieck che, rispondendo a una domanda, disse che per aprire una noce la si può colpire con un martello e schiacciarla direttamente o immergerla in un liquido opportuno e lasciare che il liquido faccia l'opera e questo secondo era il modo da lui preferito.

[5] Osserviamo en passant che la sistematizzazione dei numeri complessi precede di circa 500 anni quella dei numeri reali: anche qui potremmo chiederci il perché siano stati introdotti. Non bastava dire che una equazione come $x^2 + 1$ non ha soluzione?

Fissiamo innanzitutto il contesto. Il nostro punto di partenza sarà che *daremo per noti,* gli insiemi dei numeri naturali ($\mathbb{N}$), dei numeri interi ($\mathbb{Z}$) e, dopo qualche precisazione, dei numeri razionali ($\mathbb{Q}$) con le loro principali proprietà come anche daremo all'inizio per nota la usuale rappresentazione decimale dei numeri razionali, salvo poi tornare più diffusamentesu questi argomenti verso la fine.
Cerchiamo un insieme X che estenda gli insiemi $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ e in cui si possano fare delle operazioni e delle considerazioni che ad esempio in $\mathbb{Q}$ non si possono fare, come ad esempio la misurazione della diagonale del quadrato o provare che Achille raggiunge la tartaruga. Abbiamo pertanto bisogno di un insieme X e del fatto che su questo insieme si possano fare (siano cioè definite) due operazioni [6] che chiameremo *somma* e *prodotto* e che indicheremo rispettivamente con $+$ e con $\cdot$. Vorremo inoltre poter operare con un certo numero di regole di calcolo: chiederemo quindi che le operazioni soddisfino un numero minimo di "regole" da cui poter ricavare le altre, cioè che le operazioni verifichino un elenco, se pur minimo, di assiomi.
Abbiamo quindi bisogno di un insieme X, la natura dei cui elementi per ora lasciamo nel vago, e su X pensiamo definite due operazioni, cioè due applicazioni che chiameremo rispettivamente "somma" e "prodotto"

$$X \times X \to X, (x, y) \to x + y$$

$$X \times X \to X, (x, y) \to x \cdot y$$

che verificano i seguenti assiomi:

(1) assiomi per l'operazione somma
- S1 (associatività) $\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z)$
- S2 (commutatività) $\forall x, y \in X \quad x + y = y + x$
- S3 (esitenza elemento neutro) $\exists u \in X : \forall x \in X \quad x + u = x$
- S4 (esitenza inverso) $\forall x \in X \exists x' : x + x' = u$

(2) assiomi per l'operazione prodotto
- P1 (associatività) $\forall x, y, z \in X \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
- P2 (commutatività) $\forall x, y \in X \quad x \cdot y = y \cdot x$
- P3 (esitenza elemento neutro) $\exists e \in X : \forall x \in X \quad x \cdot e = x$
- P4 (esitenza inverso) $\forall x \neq u \ \exists x' : x \cdot x' = e$

(3) e di un assioma che leghi il comportamento delle due operazioni, cioè che le operazioni definite non siano del tutto indipendenti tra di loro:
- Dis (distributività) $\forall x, y, z \in X \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Per comodità di notazione indicheremo con 0 l'elemento neutro per l'operazione $+$ e con 1 quello per l'operazione $\cdot$ e indicheremo con $-x$ l'inverso dell'elemento x per l'operazione $+$ e con x^{-1} quello per l'operazione $\cdot$ ed abbrevieremo con $x - x$ la scrittura $x + (-x)$. Dagli assiomi discende immediatamente che l'elemento neutro per la somma è unico; supponiamo infatti che ve ne siano due u e v: risulta immediatamente dagli assiomi S3 ed S2 che $u = u + v = v$. Allo stesso modo si ha che l'inverso per la somma è unico; siano infatti x' ed x'' due inversi per x si ha $x' = 0 + x' = (x'' + x) + x' = x'' + (x + x') = x'' + 0 = x''$. Notare che l'assioma S2 permette di non fare distinzioni tra inverso destro e

[6] Una operazione (binaria) su X altro non è che una legge che associa ad una coppia di elementi di X un altro elemento di X: si pensi all'usuale somma in $\mathbb{Z}$.

sinistro. Avremo anche bisogno di richiedere che $1 \neq 0$. Proprietà analoghe si dimostrano per il prodotto.
Da questi assiomi discendono anche, con dimostrazioni analoghe a quelle viste, quelle che potremmo chiamare *regole di calcolo in* X e che sono le usuali regole aritmetiche. Vediamone qualcuna.

(1) $\forall x \in X \quad x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$
Prova. $x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0$ da cui $x \cdot 0 = 0$ □

(2) $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
Prova. $0 = 0 \cdot y = (x + (-x))y = xy + (-x)y$ da cui $(-x)y = -(xy)$ ed analogamente a destra. □

(3) $(-x)(-y) = xy$
Prova. Da (2) si ha $(-x) \cdot y = -(x \cdot y)$. Sempre per (2) $(-x) \cdot (-y) = -(-x) \cdot (y) = x \cdot y$ per unicità dell'opposto. □

Analogamente a queste si ricavano tutte le altre usuali regole di calcolo: osserviamo in particolare che la regola di calcolo (1) fornisce una giustificazione del fatto che nell'assioma P4 viene posta la condizione su x di non essere l'elemento neutro per la somma.
Un insieme dotato di due operazioni verificanti questi 9 assiomi viene detto brevemente *corpo commutativo* o *campo*.
Avremo bisogno inoltre che sull' insieme X sia definita anche una relazione di ordine che indicheremo con $\leq$.
Gli assiomi (le richieste) per la relazione d'ordine sono i seguenti

O1 (dicotomia) $\forall x, y \in X$ è vera una delle seguenti due relazioni $x \leq y$ o $y \leq x$
O2 (riflessività) $\forall x \in X \; x \leq x$
O3 (antisimmetria) $\forall x, y \in X, x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$
O4 (transitività)$\forall x, y, z \in X \; x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

Con i seguenti due assiomi esprimiamo infine che la relazione di ordine sia compatibile con le operazioni esistenti

14 $x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \forall x, y, z \in X$
15 $x \geq 0$ e $y \geq 0 \Rightarrow x \cdot y \geq 0$

Un insieme verificante tutti questi 15 assiomi viene detto brevemente un *campo ordinato.*
Un esempio di insieme siffatto, cioè di campo ordinato è l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$.
Anche qui si può verificare rapidamente che da questi assiomi si possono dedurre le usuali regole di calcolo.
Un insieme X dotato di queste propietà è una *estensione* di $\mathbb{Q}$, nel senso che esiste una applicazione iniettiva $\Phi : \mathbb{Q} \to X$ che "rispetta" la struttura, cioè
$\forall a, b \in Q$

- $\Phi(a + b) = \Phi(a) + \Phi(b)$
- $\Phi(a \cdot b) = \Phi(a) \cdot \Phi(b)$
- $a \leq b \Rightarrow \Phi(a) \leq \Phi(b)$

Una tale Φ si può ottenere in questo modo: facciamo corrispondere all'elemento $0 \in \mathbb{Q}$ l'elemento neutro per la somma ed al numero razionale 1 l'elemento neutro per il prodotto; definiamo $\Phi(n)$ la somma di n volte l'elemento neutro per il prodotto ed infine ponendo $\Phi(\frac{m}{n}) = \Phi(m) \cdot (\Phi(n))^{-1}$ si ha una estensione a tutto $\mathbb{Q}$. L' applicazione Φ così definita è iniettiva (perché?).
Quindi in un insieme dotato di queste proprietà sappiamo *"ritrovare"* i numeri naturali, gli interi ed i razionali. Continueremo ad indicare con la simbologia usuale gli interi e i razionali anche pensati dentro X se la cosa non dà adito a confusione.
Fatte queste premesse, dentro un campo ordinato possiamo rifare tutti gli abituali calcoli dell'aritmetica elementare, per esempio risolvere equazioni e disequazioni lineari. Per il momento con la parola "risolvere" intenderemo solo descrivere in modo a noi più intelligibile il sottoinsieme descritto dalla relazione.
Vediamo su un esempio che cosa ciò significhi: trasformiamo la descrizione di alcuni insiemi applicando gli assiomi (si cerchi di comprendere ad ogni passaggio la sua liceità, nel senso quali assiomi ci garantiscono che i due insiemi sono uguali)
$\{x \in X | 3x+1 > 4\} = \{x \in X | 3x+1-1 > 4-1\} = \{x \in X | 3x > 3\} = \{x \in X | x > 1\}$
Ma ancora un insieme con queste proprietà non ci basta. Infatti $\mathbb{Q}$ è un esempio di campo ordinato e abbiamo già detto che in $\mathbb{Q}$ non è possibile trovare un numero il cui quadrato sia 2, cioè risolvere l'equazione $x^2 = 2$.
Mostriamolo, ripercorrendo più o meno la prova dei greci per l'incommensurabilità della diagonale del quadrato.

Proposizione 2.1. *Non esiste alcun elemento $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$*

Prova. Vogliamo provare che per nessun numero razionale $\frac{m}{n}$ si ha $(\frac{m}{n})^2 = 2$. Supponiamo che al contrario ciò sia vero: possiamo supporre che m, n siano primi tra di loro (perché?) e quindi di diversa parità. Da $m^2 = 2n^2$ deduciamo che m non puo' esser dispari (altrimenti il suo quadrato sarebbe ancora dispari) quindi m^2 è divisibile per 4, quindi anche n^2 è pari e quindi anche n lo è arrivando ad una contraddizione..

$\square$

Dedekind ($\sim$ 1875) riprese il punto di vista dei greci e chiese un altro assioma, oggi conosciuto come assioma di continuità o completezza.

16 **Assioma di continuità.** Se A e B sono due sottoinsiemi non vuoti di X con $A \leq B$ nel senso che $\forall a \in A,\ b \in B\ a \leq b$ allora esiste in X un elemento c tale che

$$A \leq c \leq B$$

nel senso che $\forall a \in A, b \in B\ a \leq c \leq b$
Un insieme verificante tutti i 16 assiomi esposti verrà detto *campo ordinato completo.*
Assunzione: da questo momento supporremo che l'insieme X sia un campo ordinato completo.
Mostriamo a solo titolo esemplificativo come l'assioma di completezza garantisca l'esistenza in un campo ordinato completo di un numero il cui quadrato è 2, cioè della radice di 2.

Proposizione 2.2. *Sia X un campo ordinato completo. L'equazione $x^2 = 2$ ammette almeno una soluzione.*

Prova. Indichiamo con $A = \{x \in X | x > 0 \text{ e } x^2 < 2\}$ e $B = \{x \in X | x > 0 \text{ e } x^2 > 2\}$
Dagli assiomi risulta che $A < B$ nel senso che ogni elemento di A è minore di ogni elemento di B e pertanto per l'assioma 16 esiste un elemento separatore c in X. $A \leq c \leq B$.
Quello che vogliamo provare è che $c^2 = 2$.
Supponiamo che $c^2 < 2$. Mostriamo che allora esiste in X un $\delta > 0$ tale che $(c+\delta)^2 < 2$ e questa è una contraddizione perché $(c+\delta)^2 < 2 \Rightarrow c+\delta \in A$ e $\delta > 0 \Rightarrow c+\delta > c$ contro il fatto che ogni elemento di A è minore di c.
Il fatto che $c^2 < 2$ implica che esiste un altro elemento $\varepsilon \in X$ tale che $c^2 + \varepsilon < 2$. Ad esempio posso prendere $\varepsilon = \dfrac{2-c^2}{2}$, in quanto $c^2 < 2 \Rightarrow c^2 + 2 < 4$ e quindi $c^2 + \dfrac{2-c^2}{2} < 2$.
Risulta, applicando gli assiomi,

$$(c+\delta)^2 = c^2 + 2c\delta + \delta^2 = c^2 + \delta(2c+\delta)$$

Se $\delta < c$ si ha

$$(c+\delta)^2 = c^2 + \delta(2c+\delta) < c^2 + 3c\delta$$

e se $\delta < \dfrac{\varepsilon}{3c}$ risulta

$$(c+\delta)^2 < c^2 + 3c\delta < c^2 + \varepsilon < 2.$$

Quindi prendendo $\delta = \min\{c, \dfrac{\varepsilon}{3c}\}$ si ha $c+\delta \in A$ che, come abbiamo detto, è in contraddizione con $c \geq A$.

□

Osserviamo che se chiediamo a tale elemento di essere positivo allora non solo esiste ma è anche unico. Siano infatti x e y due elementi in X tali che $x^2 = y^2 = 2$
Da $x^2 = y^2$ otteniamo $(x-y)(x+y) = 0$ e dalla positività di x e y otteniamo $x = y$.
Questo ragionamento opportunamente esteso proverà che in X per ogni $a > 0$ e n intero positivo l'equazione $x^n = a$ ha soluzioni in X.

2.2. **Alcune proprietà (importanti) di $\mathbb{R}$.** D'ora in poi indicheremo con $\mathbb{R}$ un campo ordinato completo X. Tale notazione sarà giustificata tra qualche paragrafo quando avremo accennato all'unicità di un siffatto X che quindi potremo chiamare il campo dei *reali*

Proposizione 2.3. $\mathbb{N}$ *non è limitato in* $\mathbb{R}$

Prova. Ragioniamo per assurdo. Sia

$$M = \{x \in \mathbb{R} | x \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}\}$$

e supponiamo che M sia non vuoto.

Essendo ogni elemento di $\mathbb{N}$ minore di ogni elemento di M per l'assioma di continuità esiste un elemento c separatore.

$$\mathbb{N} \leq c \leq M \quad (*)$$

Esiste quindi un numero naturale m tale che

$$c-1 < m \leq c$$

altrimenti $c-1$ apparterrebbe a M.
Si avrebbe pertanto $c < m+1$ in contrasto con (*) □

Da qui discende immediatamente

Proposizione 2.4 (Proprietà di Archimede). *Siano $x, y \in X$ con $x > 0$. Esiste un intero positivo n tale che $nx > y$*

Prova. La Proposizione 2.3 garantisce che esiste un $n > \dfrac{y}{x}$ da cui la proposizione. □

Proposizione 2.5. *Per ogni elemento $x \in X$ esiste (unico) un intero k tale che*

$$k \leq x < k+1$$

Prova. Supponiamo $x > 0$. L'insieme $S = \{n \in \mathbb{N} | \, n \leq x\}$ è non vuoto e per la Proposizione 2.3 finito quindi ammette un massimo. [7] $k = \max S$ verifica le richieste. La prova per il caso in cui $x < 0$ è del tutto analoga. □

L'intero la cui esistenza è garantita da questa proposizione viene detto *la parte intera di* x e viene comunemente indicato con $[x]$; cioè si ha

$$[x] \leq x < [x]+1.$$

Proposizione 2.6. *Dato un elemento $x \in X$ ed un altro elemento $\varepsilon \in X$ positivo, esiste un numero razionale $r \in \mathbb{Q} \subset X$ tale che*

$$r \leq x < r+\varepsilon$$

Prova. Per prima cosa scegliamo un naturale m, la cui esistenza è assicurata dalla Proposizione 2.3, tale che $m > \dfrac{1}{\varepsilon}$, cioè $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$. Per Prop.2.4 esiste un intero n tale che

$$n \leq mx < n+1$$

e quindi

$$\frac{n}{m} \leq x < \frac{n}{m} + \frac{1}{m} < \frac{n}{m} + \varepsilon$$

Quindi $\dfrac{n}{m}$ verifica le richieste. □

[7] La cosa si può facilmente provare per ricorrenza. Detto n il numero di elementi di A la proprietà è banalmente vera se $n = 1$. Supponendo vera la proprietà per ogni insieme costituito da $n-1$ elementi, si tolga ad A un qualsiasi elemento ......

Proposizione 2.7 (**Densità di $\mathbb{Q}$ in X**)**.** *Dati due elementi x e y di X con $x < y$ esiste un numero razionale tra x e y.*

Prova. Per la proposizione precedente esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r \le y < r + (y - x)$. Ne segue che $-(y-x) < -(y-r)$ e quindi essendo $x = y - (y-x) < y - (y-r) < r$ si ha in definitiva $x < r \le y$. □

Proposizione 2.8 (**Non esistenza di infinitesimi**)**.** *Se $x \in X$ e $|x| \le \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ allora $x = 0$.*

Prova. Se fosse $x \neq 0$ si avrebbe che $\dfrac{1}{|x|}$ contraddirrebbe la proprietà di Archimede. □

2.3. **Estremo superiore ed estremo inferiore.** Nella prova della Proposizione abbiamo osservato che ogni sottoinsieme $A \subset X$ non vuoto e finito ammette massimo e minimo.
Questa proprietà però non susssiste più per gli insiemi infiniti, come ci si convince facilmente considerando $A = (0,1) = \{x \in \mathbb{R} | \, 0 < x < 1\}$. È chiaro che un qualsiasi numero maggiore di 1 non è il massimo di A perché non appartiene all'insieme ed è anche immediato che A non può contenere un elemento più grande di tutti: se ad esempio d fosse tale elemento dovrebbe essere $d < 1$ e quindi $d < \dfrac{1+d}{2} < 1$. Quindi A non ha massimo ed analogamente si vede che non ha minimo.
Però l'assioma di continuità ci assicura una cosa:

Proposizione 2.9 (**Estremo superiore**)**.** *Sia X un corpo ordinato completo ed $A \subset X$ un sotoinsieme non vuoto limitato superiormente. L'insieme M dei maggioranti di A ammette minimo.*

Prova. Gli insiemi A e M sono entrambi non vuoti e $\forall a \in A, \forall m \in M \quad a \le m$. L'assioma di continuità garantisce l'esistenza di un elemento separatore c.

$$A \le c \le M.$$

Dunque per ogni $a \in A$ si ha $a \le c$ e questo prova che c è un maggiorante. D'altra parte per ogni $m \in M$ si ha $c \le m$ e questo basta a concludere che c è il minimo dei maggioranti. □

L'elemento individuato nella proposizione precedente si chiama *estremo superiore di A* e viene indicato spesso come $\sup A$.

Proposizione 2.10 (**Caratterizzazione del sup**)**.** Sia A un sottoinsieme non vuoto di un corpo ordinato completo X limitato superiormente. L'elemento $L = \sup A$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà:

(1) $\forall a \in A \; L \ge a$
(2) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists a \in A : a > L - \varepsilon$

Prova. La condizione 1 dice che L è un maggiorante mentre la 2 dice che ogni elemento inferiore ad L non lo è.
Se L è il $\sup A$ verifica banalmente le proprietà 1). Se non verificasse la proprietà 2) esisterebbe un $\varepsilon_0 > 0$ tale che $L - \varepsilon_0$ risulti maggiore o uguale ad ogni elemento di A in contraddizione col fatto che L è il minimo dei maggioranti.
Viceversa supponiamo che L verifichi le proprietà (1) e (2) della proposizione. Dobbiamo verificare che allora L è il minimo dei maggioranti di A.
Supponiamo che non lo sia cioè $L \neq \sup A$. Poiché $\sup A$ è il minimo dei maggioranti ed L è un maggiorante si ha $L - \sup A > 0$; la condizione (2) prendendo $\varepsilon = L - \sup A$ ci dice che esiste $a \in A$ con $a > L - \varepsilon = L - L + \sup A = \sup A$ contraddicendo il fatto che $\sup A$ è un maggiorante di A. □

A questo punto si intuisce come si possa da qui arrivare alla nozione di limite ma questo forse esula dallo scopo che ci siamo prefisso.

2.4. **Un teorema di unicità.** Un teorema importante a questo punto è quello che ci assicura l'unicità di un tale X.

Proposizione 2.11. *Siano X_1 e X_2 due corpi ordinati completi. Allora esiste una applicazione biunivoca $\Phi : X_1 \to X_2$ che rispetta le operazioni, nel senso che*

(1) $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$
(2) $\Phi(x \cdot y) = \Phi(x) \cdot \Phi(y)$
(3) $x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$

L'idea della prova è di costruire questa Φ a partire dalle mappe φ_1 e φ_2 che "riconoscono" $\mathbb{Q}$ dentro rispettivamente X_1 e X_2.

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Q}_1 \arrow[dd, "\varphi"] & \subset & X_1 \arrow[dd, "\Phi"] \\
\mathbb{Q} \arrow[ur, "\varphi_1"] \arrow[dr, "\varphi_2"'] & & & \\
& \mathbb{Q}_2 & \subset & X_2
\end{tikzcd}$$

Idea della prova. Siano $\mathbb{Q}_1$ e $\mathbb{Q}_2$ i razionali in X_1 e in X_2, cioè i sottoinsiemi $\varphi_i(\mathbb{Q})$. L'applicazione $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ da $\mathbb{Q}_1$ a $\mathbb{Q}_2$ è una applicazione biunivoca che conserva le operazioni e l'ordinamento. È possibile prolungare questa applicazione ponendo per ogni $x \in X_1$ $\Phi(x) = sup\{\varphi(y)\ y \in \mathbb{Q}_1\ y < x\}$. Resta da provare, e viene lasciato come esercizio, che tale estensione Φ è biunivoca e conserva la struttura.
Questo teorema ci garantisce che comunque noi troviamo un insieme che verifica gli assiomi enunciati questo sarà un modello di un tale X, insieme che d'ora in poi chiameremo insieme dei numeri reali e che indicheremo con $\mathbb{R}$

2.5. **Rappresentazione decimale.** Cerchiamo di esprimere i numeri reali in una forma più agevole. Innanzitutto ricordiamo che dentro questo insieme $\mathbb{R}$ abbiamo una copia dei razionali che continuiamo a scrivere con l'abituale notazione $\dfrac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$.

Per *numeri decimali* intenderemo i razionali della forma $\dfrac{a}{10^m}$ ove a è un intero ed m un naturale.
Osserviamo che i numeri decimali sono un sottoinsieme dei numeri razionali e che sommando o moltiplicando tra loro due numeri decimali si ottiene ancora un numero decimale. Cioè in questo insieme si possono fare tutte le operazioni che si possono fare sui razionali salvo il fatto che in generale l'inverso di un decimale non nullo non è detto che sia un decimale. Quindi questo insieme con le operazioni indotte da quelle dei razionali verifica tutti gli assiomi di corpo tranne l'assioma P4. (Sinteticamente: non formano un campo ma una struttura diversa che viene detta *anello* .)
Seguendo la prova della Proposizione 2.7 possiamo provare che anche i decimali sono densi in $\mathbb{R}$: ciò ci permetterà fissato un n e dato un elemento $x \in \mathbb{R}$ di scegliere un decimale che meglio approssimi per difetto x a meno di 10^{-n}, nel senso che si può trovare un m tale che $\dfrac{m}{10^n} \leq x < \dfrac{m+1}{10^n}$.
Useremo iterativamente questa osservazione: ciò legittimerà in $\mathbb{R}$ un procedimento del tutto analogo al procedimento pitagorico per misurare due grandezze pensandole come lunghezze, procedendo al confronto e dividendo successivamente l'intervallo residuo in 10 parti uguali al fine di cercare un sottomultiplo comune.
Punto essenziale di tutto il procedimento sarà il concetto introdotto nella Proposizione 2.5 di *parte intera*, cioè l'esistenza per ogni $x \in \mathbb{R}$ di un intero n tale che $n \leq x < n+1$.
Dato $x \in \mathbb{R}$ iniziamo con l' individuare la sua parte intera, cioè il massimo intero a_0 minore o uguale a x: $a_0 = [x]$. Ponendo $r_0 = x - a_0$ avremo che $0 \leq r_0 < 1$. Quindi potremo pensare $x = a_0 + r_0$ e se $0 \neq r_0$ ripetiamo il ragionamento ed indichiamo con a_1 il massimo intero tale che $a_1 \leq 10r_0$, quindi si avrà $0 \leq a_1 \leq 9$. Quindi $r_0 = \dfrac{a_1}{10^1} + r_1$ con $0 \leq r_1 < \dfrac{1}{10}$. Cioè

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + r_1$$

con $r_1 < \dfrac{1}{10}$. Ripetiamo il ragionamento con $100r_1$ e costruiamo a_2, r_2. Iterando avremo $x = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + r_2$ con $r_2 < \dfrac{1}{10^2}$.
Proseguendo iterativamente si ha $r_{k-1} = a_k \dfrac{1}{10^k} + r_k$ con $0 \leq r_k < \dfrac{1}{10^k}$: pertanto si viene a creare una successione di interi $\{a_i\}$ per cui $a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dots \dfrac{a_n}{10^n} \leq x < a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dots \dfrac{a_n}{10^n} + \dfrac{1}{10^n}$.
Ora se x è per caso un numero decimale è chiaro che questo procedimento si arresta e si potrà allora scrivere

$$x = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots \frac{a_n}{10^n}$$

scrittura che usulamente viene abbreviata con $a_0, a_1 a_2 \dots a_n$

Altrimenti questo processo non si arresta e indicheremo $a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_n}{10^n}+\ldots$ con la scrittura $a_0, a_1a_2\ldots$, scrittura che chiameremo espansione decimale (finita o infinita) di x. Chiaramente si ha che $0 \leq x - a_0, a_1a_2\ldots a_n \leq \dfrac{1}{10^n}$.
Se consideriamo i due insiemi A e B composti, A dalle espansioni decimali finite *approssimanti per difetto* e B da quelle *approssimanti per eccesso*, risulta chiaro da tutto ciò che precede e dalla prop 2.10 che x è *l'elemento separatore* tra questi due insiemi.
Osserviamo che *le cifre costruite con questa rappresentazione non possono essere tutte definitivamente uguali a 9.*
Infatti sia $a_0, a_1a_2\ldots a_k9999\ldots$ una espansione decimale con tutti 9 dalla $(k+1)$-esima cifra in poi. Arrestando lo sviluppo alla n-esima cifra decimale con n arbitrariamente grande (maggiore di k) abbiamo
$a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_k}{10^k}+\dfrac{9}{10^{k+1}}+\ldots+\dfrac{9}{10^n}=a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_k}{10^k}+\dfrac{9}{10^{k+1}}(1+\dfrac{1}{10}+\ldots\dfrac{1}{10^{n-k-1}})=a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_k}{10^k}+\dfrac{9}{10^{k+1}}\dfrac{1-\frac{1}{10^{n-k}}}{1-\frac{1}{10}}=a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_k}{10^k}+\dfrac{1}{10^k}-\dfrac{1}{10^n}=a_0+\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\ldots+\dfrac{a_k+1}{10^k}-\dfrac{1}{10^n}$
cosa che dimostra che lo svipluppo decimale coincide (perché?) con $a_0, a_1\ldots\{a_k+1\}0000\ldots$.
D'ora in poi useremo sempre la convenzione di identificare uno sviluppo decimale in cui le cifre da un certo punto in poi, diciamo dalla $(k+1)$-esima, siano tutte uguali a 9 con lo sviluppo decimale avente le stesse cifre fino alla $(k-1)$-esima, per k-esima la k-esima aumentata di 1 e le restanti 0. In simboli

$$a_0, a_1a_2\ldots a_k9999999\ldots = a_0, a_1a_2\ldots(a_k+1)000000\ldots$$

iterando il procedimento qualora anche a_k+1 risultasse uguale a 9.
Chiameremo *allineamento decimale ridotto* un allineamento decimale $a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots$ in cui tutte le cifre non sono definitivamente uguali a 9 ed indicheremo con D l'insieme degli allineamenti decimali ridotti.

Proposizione 2.12. *Il procedimento di approssimazione descritto induce una applicazione biunivoca di $\mathbb{R}$ su D.*

Prova. Indichiamo con d l'applicazione da $\mathbb{R}$ a D che risulta dal procedimento di approssimazione descritto. Dato un numero reale x e l'espansione decimale $d(x)$ abbiamo già osservato che x risulta essere l'estremo superiore degli allineamenti decimali. [8]
Indichiamo ora con s l'applicazione da D a $\mathbb{R}$ ora descritta che associa ad una espansione decimale il sup dell'insieme A delle espansioni decimali approssimanti per difetto

$$a_0, a_1a_2\ldots a_n\ldots \to x = \sup_{n\in\mathbb{N}}\{a_0, a_1a_2\ldots a_n\}$$

[8]Infatti $a_0, a_1\ldots \leq x$ e $\forall n\ x-\dfrac{1}{10^n} < a_0, a_1a_2\ldots a_n$ e notare che per ogni $x' < x$ si può prendere n in modo tale che $x-\dfrac{1}{10^n} > x'$ così

$$x' \leq x - \frac{1}{10^n} < a_0, a_1a_2\ldots a_n.$$

Per quanto ora provato abbiamo che l'applicazione $\mathbb{R} \to D \to \mathbb{R}$ è l'identità di $\mathbb{R}$. Basta mostrare (esercizio) che anche l'altra composizione $D \to \mathbb{R} \to D$ è a sua volta l'identità di D.
Infatti ciò implica che le due applicazioni d e s risultano iniettive e suriettive. Ragioniamo sulla d.

- **iniettività** Se $d(a) = d(b)$ si ha $sd(a) = sd(b)$ ma essendo $sd = id$ ciò implica $a = b$.
- **surgettività** Sia $u \in D$. $s(u)$ è in $\mathbb{R}$ e $ds(u) = u$ quindi l'elemento $v = s(u)$ di $\mathbb{R}$ è tale che $d(v) = u$.

□

2.6. **Rappresentazione decimale e numeri razionali: algoritmo della frazione generatrice.** Abbiamo identificato il corpo dei reali $\mathbb{R}$ con l'insieme dei decimali illimitati (ridotti) D. Ovviamente una espansione decimale finita rappresenta un razionale, ma ci si convince immediatamente che non ogni razionale è rappresentabile con una espansione decimale finita: si prenda ad esempio $\frac{1}{3}$ e si vede con l'usuale divisione che l'espansione decimale è $0,333333\ldots$, espansione che viene indicata convenzionalmente con la scrittura $0,\overline{3}$.
Ci chiediamo se esista un modo di riconoscere le espansioni decimali che rappresentano un razionale e, in caso affermativo, un algoritmo per risalire a tale decimale.
Procedendo in maniera analoga a quanto fatto per dimostrare che le cifre nella rappresentazione decimale non possono essere tutte definitivamente uguali a 9 costruiamo l'algoritmo, ben noto sin dalla scuola media, della *frazione generatrice.* Più precisamente proviamo il seguente teorema.

Proposizione 2.13. *Sia α l'espansione decimale $a_0, a_1a_2\ldots$. Supponiamo che esista una sequenza di cifre $b_1 \ldots b_p$ che a partire da un certo punto in poi si ripeta costantemente, cioè α sia della forma*

$$a_0, a_1 \ldots a_h b_1 \ldots b_p b_1 \ldots b_p b_1 \ldots b_p \ldots$$ [9]

Allora α è l'espansione decimale di un numero razionale.

Useremo per un tale α la notazione classica $\alpha = a_0, a_1 \ldots a_h\overline{b_1 \ldots b_p}$, chiamando $b_1 \ldots b_p$ il periodo e $a_1 \ldots a_h$ l'antiperiodo.
Prova. Una espansione decimale può essere sempre pensata come la somma di un intero più una espansione decimale con $a_0 = 0$. Pertanto dimostreremo la cosa per le espansioni del tipo $0, a_1 \ldots a_h\overline{b_1 \ldots b_p}$.
Iniziamo la prova, per semplicità, con un α avente $h = 0$ e $p = 1$, cioè della forma $0, \overline{b_1}$. Dalle considerazioni fatte all'inizio del capitolo, abbiamo per l'allineamento decimale arrestato all'ennesima cifra, che indicheremo con $[0, \overline{b}_1]_n$,

[9] in altri termini

$$a_{h+1} = b_1, a_{h+2} = b_2, \ldots, a_{h+p} = b_p, a_{h+p+1} = b_1, a_{h+p+2} = b_2, \ldots, a_{h+2p} = b_p, a_{h+2p+1} = b_1 \ldots$$

$$[0,\overline{b_1}]_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_1}{10^2} + \ldots + \frac{b_1}{10^n} = \frac{b_1}{10}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{n-1}}\right) = \frac{b_1}{10}\left(\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}\right)$$

$$= \frac{b_1}{9}(1 - \frac{1}{10^n})$$

e quindi, essendo $0 < b_1 \leq 9$, per ogni n si ha che $[0,\overline{b_1}]_n \leq \frac{b_1}{9} < [0,\overline{b_1}]_n + \frac{1}{10^n}$ e quindi che $0,\bar{b}_1$ è l'allineamento decimale di $\frac{b_1}{9}$.
Se $\alpha = 0,\overline{b_1 b_2}$ abbiamo analogamente

$$\begin{aligned}
[0,\overline{b_1 b_2}]_{2n} &= \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \frac{b_1}{10^3} + \frac{b_2}{10^4} + \ldots + \frac{b_1}{10^{2n-1}} + \frac{b_2}{10^{2n}} = \\
&= \frac{b_1}{10}(1 + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{2(n-1)}}) + \frac{b_2}{10^2}(1 + \frac{1}{10^2} + \ldots + \frac{1}{10^{2(n-1)}}) = \\
&= \left(\frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2}\right)\left(\frac{1-\frac{1}{10^{2n}}}{1-\frac{1}{10^2}}\right) = \frac{10b_1 + b_2}{99}\left(1 - \frac{1}{10^{2n}}\right) = \frac{b_1 b_2}{99}\left(1 - \frac{1}{10^{2n}}\right)
\end{aligned}$$

e questo mostra, ricordando che $d(x)$ è il $\sup D$, che $0,\overline{b_1 b_2}$ è l'allineamento decimale del razionale $\frac{b_1 b_2}{99}$. A questo punto dovrebbe esser chiaro come dimostrare il caso generale di una espansione decimale periodica senza antiperiodo.
Per il caso in cui ci sia un antiperiodo, iniziamo dal caso $\alpha = 0, a_1\overline{b_1}$.

$$\begin{aligned}
0,a_1\overline{b_1} &= 0,a_1 + 0,0\overline{b_1} = \frac{a_1}{10} + \frac{1}{10}\cdot 0,\overline{b_1} = \frac{1}{10}(a_1 + \frac{b_1}{9}) = \frac{1}{10}(\frac{a_1\cdot 9 + b_1}{9}) = \\
&= \frac{1}{10}(\frac{a_1\cdot(10-1) + b_1}{9}) = \frac{1}{10}\cdot\frac{a_1 b_1 - a_1}{9} = \frac{a_1 b_1 - a_1}{90}
\end{aligned}$$

Da queste considerazioni non dovrebbe esser difficile, e lo lasciamo al lettore, ricavare il noto algoritmo:
La frazione generatrice di un decimale periodico α è il numero razionale con al numeratore il numero ottenuto dalle cifre di α sottraendo l'antiperiodo e al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo seguiti da tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

□

Esercizio 2.14. (1) *Caratterizzare i razionali che si rappresentano con una espansione decimale finita.*
(2) *Calcolare il numero delle cifre del periodo dell'espansione decimale di* $\frac{1}{7}$ *e di* $\frac{1}{9}$
(3) *Provare come conseguenza dell'algoritmo di divisione che l'espansione decimale che rappresenta un numero razionale è finita o periodica.*

2.7. **Approssimazione.** La Proposizione 2.5 ci garantisce che i numeri razionali della forma $\dfrac{a}{10^k}$ sono densi in $\mathbb{R}$, cioè per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon \in \mathbb{R}$ esistono $b \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}$ tali che

$$\frac{b}{10^m} \leq x < \frac{b}{10^m} + \varepsilon$$

.

La rappresentazione tramite allineamenti decimali finiti ci fornisce una serie di coppie di valori del tipo $a_0, a_1 a_2 \dots a_k$ che differiscono da x per al più 10^{-k}. Per esempio per trovare una rappresentazione decimale di $\sqrt{2}$ non è difficile con una calcolatrice verificare che $\sqrt{2}$ è compreso tra $1,4$ e $1,5$ poiché $1,4^2 < 2 < 1,5^2$, Analogamente quadrando e confrontando otteniamo

$1,41 < \sqrt{2} < 1,42$
$1,414 < \sqrt{2} < 1,415$
$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$
$1,41421 < \sqrt{2} < 1,41422$
$1,414213 < \sqrt{2} < 1,414214$
$1,4142135 < \sqrt{2} < 1,4142136$
$1,41421356 < \sqrt{2} < 1,41421357$
$1,414213562 < \sqrt{2} < 1,414213563$

Attenzione. Occorre fare attenzione nell'uso di valori approssimati perché l'approssimazione può facilmente peggiorare.
Si prenda ad esempio per $\sqrt{6}$ l'espansione decimale $2,44$ che approssimaper difetto a meno di $\dfrac{1}{100}$. Ricordando che $\sqrt{6} = \sqrt{2}\sqrt{3}$ utilizzando per $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$ le rispettive espansioni decimali per difetto approssimate a meno di $\dfrac{1}{100}$, cioè $1,41$ e $1,73$, moltiplicandole tra di loro otteniamo per $\sqrt{6}$ l'approssimazione per difetto $2,43$ (più precisamente $2,4393$) che è una approssimazione peggiore di $2,44$: $2,44^2 = 5,9536$ e $2,43^2 = 5,9049$.

2.8. **Potenze a esponente reale.** Abbiamo visto che nel corpo ordinato completo $\mathbb{R}$ l'equazione $x^2 = 2$ ha soluzioni. Vediamo ora, con dimostrazione analoga, che dato un elemento $a > 0$ di $\mathbb{R}$ per ogni naturale n esiste un solo elemento positivo in $\mathbb{R}$ tale che

Proposizione 2.15. *Ogni numero reale positivo a ha un'unica radice n-esima positiva.*

*Prova.*Procediamo in modo analogo a quanto già fatto per $\sqrt{2}$.
Se $0 < x_1 < x_2$ si ha $0 < x_1^n < x_2^n$ quindi ogni numero reale non può avere più di una radice positiva.
Sia ora $a > 0$ e

$$A = \{x \in \mathbb{R} | x > 0 \ x^n \leq a\}.$$

A è non vuoto ed è superiormente limitato. Infatti

$$c = \min\{1, a\} \in A$$

$$d = \max\{1, a\} \in M$$

.

Esiste pertanto l'estremo superiore, poniamo $x = \sup A$ e proviamo che $x^n = a$.

Poiché $0 < c \leq x$, si scelga un ε tale che $0 < \varepsilon < x$. Allora, essendo $0 < x-\varepsilon < x < x+\varepsilon$ si ha
$$(x-\varepsilon)^n < x^n < (x+\varepsilon)^n.$$
Per le proprietà caratterizzanti l'estremo superiore, fra $x-\varepsilon$ e x vi è certamente un elemento di A mentre $x+\varepsilon \in A$. Pertanto
$$(x-\varepsilon)^n < a < (x+\varepsilon)^n.$$
Da ciò segue
$$|x^n - a| < (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n < 2^{n+1}x^{n-1}\varepsilon.$$ [10]
Quindi $|x^n - a|$ è minore di ogni prefissato numero positivo e quindi (Prop 2.8) $|x^n - a| = 0$ cioè $x^n = a$. $\square$

A questo punto diventa facile definire che cosa si possa intendere per potenza a esponente reale. In $\mathbb{R}$ possiamo definire $x^n = x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ cioè il prodotto di n copie di x e indicando con $x^{\frac{1}{m}} = \sqrt[m]{x}$, che sappiamo esistere in base alla proposizione precedente, abbiamo che ha senso la scrittura $x^{\frac{n}{m}} = (x^n)^{\frac{1}{m}}$ e se $x \neq 0$ definiamo $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ se x^n esiste ed infine $x^0 = 1$.
Dalle definizioni date si deducono le usuali regole di calcolo per le potenze

$$x^r \cdot x^s = x^{r+s}$$
$$(x^r)^s = x^{r \cdot s}$$
$$(x \cdot y)^r = x^r \cdot x^s$$

Per definire la potenza x^y nel caso di un esponente y reale qualunque ed una base x positiva si può procedere sì : supponiamo $y > 0$ e $x > 1$: consideriamo l'insieme
$$E = \{x^r | r \in \mathbb{Q}\ r \leq y\};$$
dalle considerazioni fatte risulta che tale insieme è ben definito e che è limitato superiormente in quanto se r è un razionale maggiore di y ogni elemento di E è minore di x^r. Indichiamo con x^y l'estremo superiore dell'insieme E
$$x^y = \sup E.$$
È facile verificare che nel caso y sia razionale la definizione porta allo stesso valore definito in precedenza.
Poniamo per definizione
$$x^y = \begin{cases} \dfrac{1}{(\frac{1}{x})^y} & \text{se } y > 0 \text{ e } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \text{ e } y \text{ qualunque} \\ \dfrac{1}{x^{-y}} & \text{se } y < 0 \text{ e } x \text{ qualunque positivo} \end{cases}$$
e si verificano le usuali proprietà dell'elavzione a potenza.

[10] $(x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = ((x+\varepsilon) - (x-\varepsilon))(\sum_{k=0}^{k=n-1} (x+\varepsilon)^{n-1-k}(x-\varepsilon)^k < 2\varepsilon \cdot ((2x)^{n-1})$

A questo punto è chiaro come rendere fondata la seguente definizione

Definizione 2.16. *Se a è un numero reale positivo si definisce logarimo di b in base a il numero reale l definito da*

$$a^l = b.$$

Dalle regole di calcolo appena esposte risulta che

$$\log_a(b_1 \cdot b_2) = \log_a(b_1) + \log_a(b_2)$$

proprietà alla base del cosiddetto *regolo calcolatore*e che spiega l'utilizzazione delle scale logaritmiche.

3. Considerazioni finali.

3.1. **Con i reali possiamo misurare tutto?** Come sappiamo con la classe dei numeri reali sappiamo fare molte cose: ora vogliamo evidenziarne i limiti, vedere cioè se esistono cose che non possiamo esprimere in termini di numeri reali. La prima cosa che viene in mente sono ovviamente le radici quadrate dei numeri negativi in quanto in $\mathbb{R}$ ogni quadrato è positivo. Ma sappiamo anche che a questo si ovvia con la classe dei numeri complessi.
Evidenzieremo classi di grandezze che non possono essere misurate tramite i numeri reali partendo dal fatto che i numeri reali godono della proprietà di Archimede.

3.1.1. *Un esempio di classe non archimedea.* Un esempio di grandezze non archimedee possiamo ricavarlo dalla geometria. Quando pensiamo agli angoli pensiamo agli angoli "rettilinei", cioè delimitati da rette o semirette. Aggiungiamo a questa classe gli angoli cosiddetti di contingenza, cioè gli angoli formati ad esempio da una circonferenza e dalla sua retta tangente in un punto. Si può provare che quest'ultimo angolo è minore di qualsiasi angolo acuto rettilineo.
Più precisamente mostriamo che

(1) Una retta tracciata perpendicolare ad un diametro in un estremo di questo cadrà esternamente al disco
(2) Nessuna altra retta potrà interporsi fra questa retta e la circonferenza.

Prova. Per provare la prima asserzione, sia S la circonferenza ed A un suo punto: indichiamo con r la retta ortogonale al diametro nel punto A. Se questa retta incontrasse la circonferenza in un punto P si avrebbe che il triangolo OPA sarebbe isoscele in quanto i lati OA e OP sono uguali e quindi i due angoli in A e in P sarebbero uguali, cioè entrambi di 90°, il che porterebbe al fatto che la somma degli angoli interni sarebbe maggiore di 180°, cosa non possibile. (Confronta la Figura 1 a sinistra.)
Per la seconda supponiamo che la retta s uscente da A si interponga tra la retta r e la circonferenza. Sia H il piede della perpendicolare a s tracciata da O: AO risulta essere l'ipotenusa del triangolo OHA rettangolo in H e quindi di lunghezza maggiore ad OH; essendo H esterno alla circonferenza indichiamo con G il punto di incontro di OH con la circonferenza. AO quindi risulta essere uguale ad OG essendo due raggi della stessa circonferenza e maggiore di OH che contiene propriamente OG. Assurdo perché il tutto è sempre maggiore di una sua parte. (Confronta la Figura 1 a destra.)

FIGURA 1.

Da tutto ciò si deduce che l'angolo di contingenza è minore di qualsiasi angolo acuto rettilineo, poiché altrimenti si potrebbe inserire tra la retta r e la circonferenza un'altra retta, cosa che abbiamo visto non possibile.
Pertanto poiché nei numeri reali vale la proprietà di Archimede con tale classe di numeri non è possibile misurare queste grandezze. $\square$

3.1.2. *Infiniti ed Infinitesimi.* Un altro esempio di grandezza non archimedea, e quindi ancora non misurabile con i numeri reali, la possiamo incontrare studiando il modo di crescere o di annullarsi delle funzioni.
Tramite la classe dei numeri reali abbiamo visto che si può dare senso a molti concetti, tra cui quello di limite per le funzioni.
Ora, date due funzioni f, g da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ divergenti, cioè tali che $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ e che $\lim_{x\to\infty} g(x) = +\infty$, possiamo chiederci se per caso queste due funzioni divergano in modo diverso, ad esempio con velocità differente.
È chiaro che se consideriamo, ad esempio, le funzioni x e x^2 e se tabuliamo i valori delle funzioni sulla successione degli interi si osserva i valori relativi alla seconda funzione crescono "più rapidamente"di quelli relativi alla prima.
Per dare più concretezza a questa idea, studiamo il comportamento del $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{g}$ e a seconda che questo sia ∞, finito, 0 diremo, seguendo una visione intuitiva, che la funzione f diverge più rapidamente, nello stesso modo o meno rapidamente della funzione g, o che f è un infinito di ordine maggiore, uguale o minore di g.
Volendo essere ancora più precisi e quindi cercare di misurare questo ordine di infinito, potremmo fissare una funzione g di riferimento e confrontare le funzioni con questa g. Ad esempio possiamo fissare come funzione di riferimento x^n. Pertanto diremo che una funzione è un infinito di ordine maggiore, uguale o minore di n se $\lim_{x\to\infty} \frac{f}{x^n}$ è uguale rispettivamente a ∞, finito o 0.
Fin qui nulla di male: il problema nasce quando ci chiediamo se possiamo misurare questi infiniti con i numeri reali.
Il fatto che $\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ ci dice che se gli ordini di infinito fossero misurabili con i numeri reali, nei reali ci sarebbe un elemento più grande di ogni naturale e questo contraddirrebbe di nuovo il principio di Archimede che dice che i naturali nei reali sono illimitati.

Analogamente avremmo quantità infinitesime, cioè quantità positive minori di $\frac{1}{n}$ per ogni n ma diverse da 0. Basta ad esempio considerare l'infinitesimo dato dalla funzione $\frac{1}{\ln \frac{1}{x}}$.

3.2. **Area del rettangolo.** Proviamo a misurare un rettangolo di lati a e b, dove a, b sono due mumeri reali. Se a e b sono *commensurabili* abbiamo una grandezza u tale che $a = mu, b = nu$ ed è immediato mostrare che il rettangolo R è unione di $m \cdot n$ quadrati di lato u, cioè la misura di R è commensurabile con quella del quadrato di lato u.
Ma se ciò non accade allora non è immediato mostrare che la misura del rettangolo è ancora $a \cdot b$. Per farlo occorrerebbe mettere in piedi un procedimento di esaustione e mostrare che la misura di R è maggiore di quella di tutti i rettangoli con lati "commensurabili" contenuti in R e minore di quella di tutti i rettangoli con lati commensurabili contenenti R e che , per l'assioma di Dedekind, l'elemento separatore di queste due classi è proprio $a \cdot b$.
Si perviene ancora al fatto che la misura è $a \cdot b$ ma usando un poco di proprietà dell'insieme dei numeri reali.
Una volta calcolata l'area del rettangolo si può pensare di approssimare per difetto la misura di una data figura F riempendo F di rettangoli tutti interni e considerando la somma delle misure di tali rettangoli, di approssimarla per eccesso ricoprendo F con una unione di rettangoli e prendendo la somma delle misure di tali rettangoli e ripetere il procedimento prendendo rettangoli via via più piccoli in modo da approssimare sempre meglio la misura di F: si perviene a due classi di numeri reali A e B che per l'assioma di continuità sono separate da un (unico) numero nreale c e si può prendere tale c come misura di F, arrivando così in pratica alla nozione di misura di Peano-Jordan.

Appendice A. Qualche richiamo.

A.1. **Divisibilità in $\mathbb{Z}$.** Richiamiamo qui brevemente per comodità di chi legge alcuni concetti che dovrebbero esser noti dalla scuola media.
Per prima cosa ricordiamo la nozione di divisibilità in $\mathbb{Z}$: dati $a, b \in \mathbb{Z}$diciamo che a è *divisibile* per b o che b *divide* a (in simboli $b|a$) se esiste $c \in \mathbb{Z}$ tale che $a = bc$.
Diremo che un elemento $d \in \mathbb{Z}$ è il Massimo Comun Divisore di a e b se

(1) d divide a e b
(2) se $d'|a$ e $d'|b$ allora $d'|d$.

Teorema A.1. *$\forall a, b \in \mathbb{Z},\ a, b \neq 0$ esiste il MCD.*

Proveremo questo teorema utilizzando la *divisione euclidea*

Teorema A.2 (Divisione euclidea). *Per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$ esistono unici $q, r \in \mathbb{Z}$ tali che*

(1) $a = bq + r$
(2) $0 \leq r < |b|$

Prova. Consideriamo l'insieme

$$R = \{a - nb \geq 0\}$$

Tale insieme è non vuoto perché almeno uno dei due numeri che si ottengono ponendo $n = a$ oppure $n = -a$, appartiene a R. Infatti se $a + ab = a(1 + b) < 0$ ciò significa che a e $1 + b$ sono di segno discorde e quindi risulta $a - ab > 0$ perché se $a > 0$ allora deve essere $1 + b < 0$ cioè $b < -1$ e quindi $a(1 - b) > 0$mentre se $a < 0$ allora $1 + b > 0$ e quindi ancora $a(1 - b) > 0$.
Per il principio del buon ordinamento abbiamo che R ha un minimo elemento: indichiamo con r tale minimo e con q il rispettivo n.
Risulta $0 \leq r < |b|$: infatti se cosí non fosse si avrebbe $r' = r - |b| > 0$ e $r' = r - |b| = a - qb - |b| = a - \left(q + \dfrac{|b|}{b}\right) b = a - q'b$ e quindi avremmo che anche $r' \in R$ e iò in contraddizione che r è il minimo.
Deriviamo da questa condizione l'unicità del quoziente e del resto.
Se q' e r' sono due altri interi che verificano il teorema, da

(1) $a = bq + r$ con $0 \leq r < |b|$
(2) $a = bq' + r'$ con $0 \leq r' < |b|$

sottraendo la (2) dalla (1) otteniamo $-b(q - q') = r - r'$. La condizione sui resti implica che $r - r' \leq r < |b|$ e $r' - r \leq r' < |b|$, cioè in definitiva che $|r - r'| < |b|$. mentre $-b(q - q') = r - r'$ implica che $|b||q - q'| = |r - r'|$, cioè che $|q - q'| < 1$ il che implica $q = q'$ e di conseguenza $r = r'$.

□

Nota A.3. *Osserviamo che il resto della divisione euclidea è positivo. La tabella che segue mostra quoziente e resto in 4 esempi particolari.*

a	b	q	r
5	*2*	*2*	*1*
-5	*2*	*-3*	*1*
5	*-2*	*-2*	*1*
2	*5*	*0*	*2*

Teorema A.4. *Per ogni coppia di numeri interi a, b non nulli esiste il Massimo Comun Divisore.*

Prova. Otterremo questo teorema come conseguenza della divisione euclidea.
Siano infatti a, b due numeri interi ed eseguiamo la divisione euclidea di a per b:

$$a = bq + r$$

Se $r = 0$ è evidente che il Massimo Comun Divisore tra a e b è b.
Se $r \neq 0$ dividiamo b per r:

$$b = rq_1 + r_1$$

Se $r_1 = 0$ è evidente che r divide sia b che a e quindi è un divisore e viceversa che se d divide sia a che b divide r e quindi che r è il Massimo Comun Divisore tra a e b.
Se $r_1 \neq 0$ iteriamo l'operazione dividendo r per r_1.

$$r = r_1 q_2 + r_2.$$

Ancora una volta se $r_2 = 0$ risulta che r_1 dividendo r e r_1 divide b e dividendo r e b divide a e quindi che r_1 è un divisore comune tra a e b. Viceversa se d divide sia a che b divide r e dividendo sia b che r divide r_1. Quindi r_1 è il Massimo comun divisore tra a e b.
Se $r_2 \neq 0$ iteriamo l'operazione fino a che non troviamo un resto $r_{n+1} = 0$, cosa assicurata dal fatto che ogni volta per il resto r_i abbiamo $r_i < r_{i-1}$.
Ragionando come prima, cioè risalendo e discendendo lungo le divisioni successive, si vede che r_n divide a e b e che se d divide a e b allora d divide r_n e quindi che r_n è il Massimo Comun Divisore tra a e b. $\square$

A.2. **Qualche discorso sui razionali.** Consideriamo l'insieme delle coppie $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ e su questo insieme la relazione

$$(a, b) \sim (c, d) \iff ad = bc.$$

È di immediata verifica che tale relazione è riflessiva simmetrica e transitiva, cioè è una relazione di equivalenza. Indichiamo con $[(a, b)]$ la classe di equivalenza della coppia (a, b) e con X l'insieme di tali classi.
Sull'insieme X possiamo definire due operazioni

$$[(a, b)] + [(c, d)] = [(ad + bc, bd)]$$
$$[(a, b)] \cdot [(c, d)] = [(ac, bd)]$$

Occorre verificare che la definizione data sia ben posta, cioè non dipenda dal rappresentante scelto per la classe.
Per la somma ciò significa che se (a', b') è un altro rappresentante della classe $[(a,b)]$, cioè $a'b = ab'$, e (c', d') un altro rappresentante della classe $[(c,d)]$, cioè $c'd = cd'$, si deve avere che $(ad + bc, bd) \sim (a'd' + b'c', b'd')$, cioè $(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$. Ma

$$(ad + bc)b'd' = ab'dd' + cd'bb' = a'bdd' + c'dbb' = (a'd' + b'c')bd$$

che è esattamente quello che si voleva. Per il prodotto la verifica è del tutto analoga.
Indicheremo con $\dfrac{a}{b}$ la classe $[(a,b)]$. Pertanto $\dfrac{a}{b}$ e $\dfrac{a'}{b'}$ individuano la stessa classe se $(a,b) \sim (a', b')$. In particolare, poiché possiamo scegliere come rappresentante di una classe di equivalenza una coppia (a,b) ridotta ai minimi termini, cioè con a, b tali che $MCD(a,b) = 1$, in quanto $(a,b) \sim (ak, bk)$ per ogni $k \neq 0$, dovrebbe risultar chiaro che cosa si intenda con il fatto che un rappresentante può essere scelto "ridotto ai minimi termini" e che la somma di due razionali $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d}$, entrambi ridotti ai minimi termini, si ottiene riducendo ai minimi termini $\dfrac{ad + bc}{bd}$.
Un'altra verifica immediata è che in questo insieme valgono le usuali proprietà delle operazioni nei razionali. E cioè, indicando con 0 la classe $(0, a)$ e con u la classe $[(a,a)]$ si ha

(1) Entrambe le operazioni godono della proprietà associativa, cioè $\forall\ q, r, s \in X \quad (q + r) + s = q + (r + s)$ e $\forall\ q, r, s \in X \quad (q \cdot r) \cdot s = q \cdot (r \cdot s)$
(2) Entrambe le operazioni godono della proprietà commutativa, cioè $\forall\, q, r \in X\ \ q + r = r + q$ e $\forall\ q, r \in X \quad q \cdot r = r \cdot q$.
(3) Esiste un elemento neutro per la somma, cioè $\exists\, 0$ tale che$\forall q \in X q + 0 = 0 + q = q$, ed un elemento neutro per il prodotto , cioè $\exists\, e$ tale che $\forall q \in X \ \ q \cdot e = e \cdot q = q$
(4) Esiste un inverso per la somma per ogni elemento e un inverso per il prodotto per ogni elemento diverso da 0, cioè $\forall\ q \in X\ \exists\ q'$ tale che $q + q' = q' + q = 0$ e $\forall\ q \in X\ q \neq 0\ \exists\ q'$ tale che $q \cdot q' = q' \cdot q = e$.
(5) Vale la proprietà associativa, cioè $\forall\ q, r, s \in X \quad (q + r) \cdot s = q\dot{s} + r \cdot s$ e analogamente a sinistra.

Indicheremo rispettivamente con 0 l'elemento neutro per la somma e con 1 quello per il prodotto.
Si osservi che l'elemento neutro per la somma e per il prodotto sono unici, infatti se ce ne fossero due, 0 e $0'$ si avrebbe

$$0 = 0 + 0' = 0'$$

e analogamente per il prodotto.
Ciò implica che $\forall q \in X$ si ha $q \cdot 0 = 0$. Infatti $q \cdot 0 = q \cdot (0 + 0) = q \cdot 0 + q \cdot 0$ da cui per l'unicità dell'elemento neutro si ha $q \cdot 0 = 0$. Quindi, punto (4), non può esistere un elemento che moltiplicato per 0 dia 1.
Ragionando in modo analogo si verifica che in X come conseguenza delle proprietà appena dette valgono tutte le usuali regole di calcolo.
L'insieme X con le operazioni definite si indica usualmente con $\mathbb{Q}$.

In X sappiamo quindi risolvere le equazioni del tipo $ax = b$ con $a, b \in \mathbb{Z}$ però, come abbiam visto, non esiste nessun elemento q tale che $q^2 = 2$, cioè non sappiamo risolvere le equazioni del tipo $x^2 - 2 = 0$.
Con il passaggio al corpo (ordinato,completo) dei reali si estende $\mathbb{Q}$ ad un ambiente più ampio,dove in particolare una equazione come $x^2 - 2 = 0$ ha soluzione: questo ambiente fornirà anche l'ambiente ideale per trattare molte altre questioni.

Appendice B. Qualche considerazione a latere.

Questa appendice è dedicata a qualche considerazione su due temi, il primo è il termine "assiomatico" e il secondo è se valga o meno ancora la pena di affrontare uno sforzo didattico di questo tipo per introdurre i numeri reali..

B.1. **Una micro riflessione sul termine assiomatico.** Spendo due parole sul concetto di assioma perché non ho mai capito il mirror climbing di certi testi, di certi dizionari per spiegarne il significato, fino ad arrivare alla celebre definizione una verità così evidente da non aver necessità di esser dimostrata.
È una cosa con cui si ha confidenza fin da bambini: si pensi ai giochi in cui si mette come regola ad esempio che "io sono il re e tu il feudatario". Stiamo fissando le regole delle interazioni tra i partecipanti al gioco.
Si pensi ai giochi di carte: l'asso e il tre non hanno gli stessi valori e le stesse interazioni nel gioco della scopa o in quello della briscola.
Ancora, si provi a definire un pezzo, ad esempio il cavallo, nel gioco degli scacchi: la definizione poggia su come questo pezzo si interrelaziona con gli altri: è quel pezzo che si muove in quel determinato modo in un ambito determinato da certe regole.
Spesso si ha un insieme di oggetti e delle regole, degli assiomi, su come questi si interrelazionano tra di loro: in questa ottica non è così importante ad esempio quanto faccia 2^π ma piuttosto che $2^\pi \cdot 2^\pi$ faccia $2^{2\pi}$, cioè che si possano moltiplicare tra loro gli elementi, o meglio che sia definita una operazione (che noi chiamiamo per comodità moltiplicazione) e che magari in presenza di un'altra operazione si comporti in un certo modo.
Quindi, come si vede, fin da piccoli interagiamo senza rendercene conto con strutture assiomatiche [11] per cui penso che su questo tema ci si possa fermare qui.

B.2. **Ma ne vale la pena?** L'argomento principale dell'incontro, vista sia la sua importanza in ogni settore della matematica e anche la poca familiarità che gli studenti che arrivano da noi dimostrano di averne, è stata la classe dei numeri reali.
Ma a questo punto, alla fine di questa chiacchierata che, usando come spunto il tema dei numeri reali, ha offerto l'occasione di soffermare l'attenzione su parecchi argomenti, voglio accennare ad una domanda che mi è venuta in mente fin dall'inizio e che motiva la prossima piccola divagazione, e cioè se "ne valga la pena", ovverosia l'opportunità o meno di seguire questa strada, di perder del tempo per trasmettere tutto ciò ai giovani al posto di opportuni e agili algoritmi.
Da molti anni sia io che colleghi entriamo in contatto con giovani che si affacciano alle prime classi dell'insegnamento universitario in materie a carattere scientifico in facoltà non di nicchia, come ad esempio ingegneria, e constatiamo, accanto ad un progressivo e coralmente lamentato degrado della loro preparazione, soprattutto un aumento dell'incomprensione da parte degli studenti di quello che ci si aspetta da loro e abbiamo potuto constatare, visto il largo bacino di utenza che Pisa presenta, che ciò è trasversale alla provenienza geografica.
Semplificando un poco, si può dire che ci troviamo spesso davanti ad una platea di giovani la maggior parte dei quali applica ciecamente algoritmi probabilmente recepiti senza alcun impianto culturale, senza alcun fondamento, appresi alla stregua di poesie imparate a

[11] In fondo in fondo anche i 10 comandamenti possono esser visti come assiomi di una certa società.

memoria e senza alcun collegamento tra vari aspetti dell'informazione ricevuta, magari in settori apparentemente distanti tra di loro.
A parer mio occorre superare il facile giudizio di una globale impreparazione nozionistica, ovviamente presente, come causa prima del problema, ma piuttosto considerare questa impreparazione come conseguenza di una carenza che potremmo riassumere come "culturale", nel senso di una fondamentale incomprensione di ciò di cui si sta parlando, facilmente evidenziabile perturbando leggermente la situzione standard di riferimento. Solo come esempio della confusione tra nozione e algoritmo di verifica, ho provato a domandare se la funzione $|x|$ ammetta o meno un minimo (relativo o assoluto poco importa) nel suo dominio di definizione e ho constato che non la maggioranza ma la quasi totalità dei presenti risponde negativamente, motivando ciò con il fatto che la funzione non è derivabile nel punto naturalmente candidato, cioe l'origine.
Di questi esempi, in cui è evidente la confusione tra nozione ed eventuale algoritmo di calcolo, la nostra esperienza è piena al punto che potremmo riempire con essi un libro, un altro *Io speriamo che me lo cavo* :[12] tutto ciò porta a pensare che gli studenti abbiano recepito l' insegnamento come focalizzato, almeno nell'atto della verifica, più al controllo dell'applicazione dell'algoritmo che alla comprensione dei concetti in gioco.
È evidente che a mio avviso in tutto ciò il ruolo che dovrebbe svolgere la scuola media inferiore e superiore è centrale e di conseguenza un ruolo di fondamentale importanza lo svolge proprio l'insegnante a cui è demandata la formazione di intere classi di giovani generazioni.
La principale carenza, sempre secondo la mia opinione, è questo aver abdicato alla formazione culturale dello studente, intesa come consapevolezza e coscienza in ogni istante di ciò che si sta facendo, in favore di una preparazione, sicuramente più rassicurante [13] basata su algoritmi studiati come poesie a memoria, come se, cambiando campo, i Promessi Sposi si riducessero ai capponi di Renzo o a che cosa egli avesse mangiato in osteria.
Se, come leggevo recentemente in un articolo di un tabloid, viaggiare con i figli è bello per molti motivi, tra cui il fatto che si spende tempo di qualità assieme a loro che porta alla fine come saldo positivo dell'aver visitato posti nuovi il fatto che fin da piccoli si sono abituati a confrontarsi con mondi, persone, imprevisti e difficoltà, cosa che sicuramente contribuisce o contribuirà alla loro formazione, aiutandoli a diventare persone curiose, sicure di se, aperte agli altri, a mio avviso la stessa cosa vale per l'insegnante che accompagna lo studente nel viaggio alla scoperta della cultura, di quello che hanno prodotto gli esseri umani nelle varie forme, nelle varie situazioni locali e abitua gli studenti a confrontarsi, come in un viaggio vero, con le stesse cose, mondi, persone, imprevisti e difficoltà, cosa che collabora, esattamente come nel caso del viaggio fisico, in modo determinante alla formazione della classe che si affaccia all'età adulta.
Tornando alla domanda se valga o meno la pena di mantenere nella trasmissione del sapere ancora questo punto di vista, se la risposta è, come io credo, positiva questo chiama in causa, sempre a mio avviso, esattamente gli insegnanti, il valore culturale del cui ruolo è stato troppo spesso sottovalutato, riducendo l'insegnamento in tutte le materie a una

[12] Gli esempi sono moltissimi e di natura più disparata: da persone che non sanno dare esempi di fenomeni periodici, da persone che scrivono nei compiti che il numero degli elementi sulla diagonale di una matrice $n\times$ è $n\sqrt{2}$, persone che non distinguono tra , sconto e rimborso per non parlare del successo della la burla dei numeri arabi

[13] per chi?

mera trasmissione di algoritmi, invece di abituare lo studente al pensiero e all'uso della sua intelligenza.
Pertanto è chiaro che a nostro avviso il ruolo dell'insegnante come formatore culturale è centrale e della importanza di questo ruolo ce ne si avvede, come di quella dell'acqua, soprattutto quando viene a mancare.
Una cosa che salta agli occhi in questo panorama, a mio avviso deprimente, di abdicazione della comprensione verso il mnemonico, è il fiorire di slogan elogiativi tipo *la matematica è la regina .....,* o *la matematica ha un ruolo centrale ...,*o simili: detti così, come vuoti riempitivi in mezzo ad un discorso, sono anch'essi a mio parere algoritmi mentali o meglio scorciatoie del pensiero che, lungi dall'accrescere il valore della disciplina, contribuiscono a relegarla in un canto misterioso riservato a pochi eletti e la cui incomprensione è quasi motivo di orgoglio; sarà capitato a tutti di sentire persone vantarsi del non comprendere cose elementari di questa disciplina ma si potrebbe far loro osservare che non si vanterebbero allo stesso modo di non conoscere la consecutio temporum o l' uso del congiuntivo, riconoscendo in ciò una manifestazione di chiara ignoranza. Sarebbe anche interessante riflettere sulla differenza di atteggiamento o meglio di percezione della gravità della cosa.
Forse si potrebbe cercare di trasmettere e di far comprendere agli studenti il *valore culturale* della matematica e della scienza tutta, valore che non può essere ridotto alla tabellina ma che si trova nel fatto che le scienze e la matematica in modo particolare sono idee, invenzioni del pensiero umano pensate al fine di risolvere problemi e che producono molte cose, compresi i tanto sullodati algoritmi, incrementando l'uso di esempi espliciti, o meglio esplicitando più di un tempo le idee e lasciando sempre meno cose al non detto, poiché probabilmente è cambiato il sottinteso culturale tra la classe degli insegnanti e quella degli studenti.
Aiutare a far riconoscere allo studente il valore culturale della matematica come pari a quello degli altri campi che egli incontra nel suo percorso, in quanto espressione della creatività del pensiero umano, è un atteggiamento che potrebbe contribuire al superamento della diffidenza verso di essa, con buona pace dei pensatori che la relegano a un ruolo secondario nel campo del sapere, anzi in particolare la matematica è proprio pensiero, astrazione: alcuni studiosi contemporanei ritengono che molti degli errori che noi consideriamo stupidi provengano proprio da difficoltà degli studenti nel campo dell'astrazione.
E l'educazione a tutto ciò è un fatto importante che rende il ruolo dell'insegnante di matematica non secondario a nessun altro, ammesso che abbia senso una graduatoria tra i diversi campi del sapere, tutte creazioni del pensiero umano: una sorta di manuale Cencelli delle materie. L'insegnante di matematica non è un insegnante di tabelline ma di idee.
Come già detto nel primo paragrafo forse un piccolissimo esempio di azione in questa direzione potrebbe essere il coinvolgimento di insegnanti di altre materie in momenti interdisciplinari, cercando di mettere in luce ad esempio le profonde interrelazioni tra la visione filosofica e quella scientifica del mondo e come alcune idee in un campo abbiano potuto e ancora oggi possano avere influenza nell'altro. Si pensi alle interrelazioni tra pensiero matematico-scientifico e pensiero filosofico ad esempio nell'antica Grecia, o in altri periodi, si pensi all'influenza che hanno avuto nel pensiero personaggi, per limitarci ancora al passato, come Giordano Bruno, Galileo, Copernico, alcuni dei quali hanno rivoluzionato la visione del mondo. In fondo anche Newton è difficile immaginarlo predire passaggi di corpi celesti ed avere successo fuori da un contesto illuministico.

Ci si potrebbe anche chiedere se l'avvento del romanticismo, avvolto nel suo cosmico pessimismo, abbia una qualche relazione con l'irrompere del caos nell'ordinato mondo delle equazioni differenziali e con l'apparire di nuove teorie come le geometrie non euclidee che contraddicono il razionale universo kantiano. Ma forse è bene fermarsi qui.

Fabrizio Broglia
Dipartimento di Matematica, Università di Pisa
e-mail: fabrizio.broglia@unipi.it