Esercizio 1.

a) Si applicano i teoremi di Gerschgorin. Si denoti C_i il cerchio di Gerschgorin costruito sulla i-esima riga di A per cui C_1 ha centro b e raggio b^2, C_i ha centro ib e raggio $2b^2$ per $i = 2, \dots, n$ mentre C_i ha centro $(i-n)(b-1)$ e raggio $2b^2$ per $i = n+1, \dots, 2n-1$ infine C_{2n} ha centro $n(b-1)$ e raggio b^2.

Se $0 < b \leq 1/2$ risulta $b - b^2 > 0$ e $ib - 2b^2 > 0$ per $i = 2, \dots, n$ per cui i primi n cerchi sono contenuti nel semipiano destro aperto di $\mathbb{C}$ costituito dai numeri complessi con parte reale positiva. Inoltre, poiché $(b-1)(i-n) + 2b^2 \leq 0$ per $i = n+1, \dots, 2n-1$ e $(b-1)n + b^2 < 0$, i cerchi $C_{n+1}, \dots, C_{2n}$ sono contenuti nel semipiano sinistro chiuso di $\mathbb{C}$ costituito dai numeri complessi con parte reale ≤ 0. Di questi, C_{n+1} è l'unico cerchio che contiene 0 per $b = 1/2$, che inoltre sta sul bordo.

Per il secondo teorema di Gerschgorin, poiché $\cup_{i=1}^{n} C_i$ è disgiunta da $\cup_{i=n+1}^{2n} C_i$, la matrice A ha n autovalori con parte reale positiva e n autovalori con parte reale ≤ 0. Se per $b = 1/2$ esistesse un autovalore con parte reale nulla questo starebbe nella frontiera di C_{n+1} e per il terzo teorema di Gerschgorin, visto che la matrice è irriducibile, dovrebbe appartenere alle frontiere di tutti i cerchi. Il che è assurdo.

b) È sufficiente che i primi cerchi siano disgiunti tra loro e che gli altri cerchi siano contenuti nel semipiano sinistro. Infatti la tesi segue dal secondo teorema di Gerschgorin. La condizione $C_i \cap C_{i+1} = \emptyset$ è $ib + 2b^2 < (i+1)b - 2b^2$ per $i = 2, \dots, n$, mentre per $i = 1$ è $b + b^2 < 2b - 2b^2$. Si hanno quindi le condizioni

$$\begin{aligned} 3b^2 - b &< 0 \\ 4b^2 - b &< 0, \end{aligned}$$

che sono verificate per $0 < b < 1/4$. Per questi valori di b i rimanenti cerchi sono ancora contenuti nel semipiano sinistro per cui i rimanenti autovalori hanno parte reale negativa. Per motivi di continuità, gli autovalori rimangono reali anche per $b = 1/4$ e n di questi sono positivi.

Esercizio 2. a) Sia $m = 2$. Per l'autovalore λ esistono allora due autovettori u, v linearmente indipendenti. Sia $|u_k| = \max_i |u_i|$, $|v_h| = \max_i |v_i|$. Se $k \neq h$ allora procedendo come nella dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin si deduce che λ appartiene a due cerchi: il k-esimo e l'h-esimo. Se invece $h = k$, posto $t = v_h/u_h$ si ha che $w = v - tu$ è non nullo poiché u e v sono linearmente indipendenti, e inoltre è autovettore essendo combinazione lineare non nulla di due autovettori corrispondenti allo stesso autovalore. Inoltre $w_h = 0$ per cui il $\max_i |w_i|$ viene preso su un indice $\widehat{k}$ diverso da h. Quindi, procedendo ancora come nella dimostrazione del primo teorema di Gerschgorin, si deduce che $\lambda \in C_h \cap C_{\widehat{k}}$.

b) Se $v^{(1)}, \dots, v^{(m)}$ sono gli autovettori, considero la matrice V le cui righe sono $v^{(i)T}$, $i = 1, \dots, m$. Sia $V = LU\Pi$ la fattorizzazione di V ottenuta applicando l'eliminazione gaussiana col massimo pivot sulle colonne, dove Π è matrice di permutazione. In questo modo le righe di $V\Pi$ sono ancora autovettori di H essendo combinazioni lineari di autovettori, inoltre, poiché gli elementi diagonali di V sono quelli di massimo modulo sulle rispettive righe, si ha che ciascuna riga di $V\Pi^T$ è autovettore con elemento di modulo massimo preso su indici diversi. Il primo teorema di Gerschgorin completa la dimostrazione.

La matrice companion associata al polinomio $(x+a)^2$, cioè

$$\begin{bmatrix} 0 & -a^2 \\ 1 & -2a \end{bmatrix}$$

è tale che $\lambda = -a$ è autovalore di moltelicità algebrica 2 e geometrica 1. Se $a = 1/2$, solo il secondo cerchio contiene λ.

Esercizio 3. Dalla teoria, si sa che per avere ordine almeno 2 deve essere $p'(\sqrt{2}) \neq 0$ e per avere ordine almeno 3 basta che $p''(\sqrt{2}) = 0$. Quindi si hanno le due equazioni $p(\sqrt{2}) = 0$, $p''(\sqrt{2}) = 0$ e la condizione $p'(\sqrt{2}) \neq 0$.

Si osserva che $p(x)$ non può avere grado 2 poiché $p''(x) = 2 \neq 0$, e non può avere grado 3 poichè ancora $p''(x) = 6x$ per cui $p''(\sqrt{2}) \neq 0$. Provo allora con $p(x)$ di grado 4. Poiché $p(\sqrt{2}) = 0$ e $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$, allora necessariamente $p(x)$ è diviso da x^2-2, per cui $p(x) = (x^2-2)q(x)$ con $q(x)$ di grado 2. Posso scegliere $q(x)$ monico cioè $q(x) = x^2 + ax + b$.

Imponendo la condizione $p''(\sqrt{2}) = 0$ ottengo $6a\sqrt{2} + 20 + 2b = 0$. Poiché $a, b \in \mathbb{Q}$, deve essere $a = 0$, $b = -10$ quindi $p(x) = (x^2-2)(x^2-10) = x^4 - 12x^2 + 20$. Vale inoltre $p'(\sqrt{2}) \neq 0$ e $p'''(\sqrt{2}) \neq 0$ per cui la convergenza del metodo di Newton è di ordine 3.

Il metodo di Newton applicato a questo polinomio è dato dalla funzione

$$g(x) = x - p(x)/p'(x) = x - (x^4 - 12x^2 + 20)/(4x^3 - 24x)$$

Usando l'identità

$$g(x) = \frac{3}{4}\frac{x^2(x^2-2) - 20/3}{x(x^2-6)}$$

il calcolo di $g(x)$ si può svolgere con 8 operazioni aritmetiche.

Mentre il metodo di Newton applicato a x^2-2, dato da $g(x) = x - (x^2-2)/(2x) = (x^2+2)/(2x) = x/2 + 1/x$ ha un costo di 3 operazioni per passo. Dalla teoria si sa che un metodo di ordine $p_1 > 1$ e di costo per passo c_1 è più conveniente di un metodo di ordine $p_2 > 1$ e costo per passo c_2 se $c_1/c_2 < \log p_2/\log p_1$. Nel nostro caso, con $c_1 = 8$, $p_1 = 3$, $c_2 = 2$, $p_2 = 2$ si ottiene la diseguaglianza $8/3 < \log 3/\log 2$, equivalente a $\log 2^8 < \log 3^3$, che è evidentemente falsa essendo $2^8 = 256 > 27 => 3^3$ ed essendo il logaritmo una funzione crescente.

il nuovo metodo è quindi meno efficiente del metodo di Newton applicato al polinomio $x^2 - 2$.

Esercizio 4 Confrontando gli elementi nella relazione $A = LU$, dagli elementi sopra diagonali si ottiene l'identità $b_i = b_i$, mentre confrontando gli elementi diagonali si ha $a_1 = u_1$, $a_i = u_i + \ell_{i-1} b_{i-1}$, $i = 2, \ldots, n$. Infine confrontando gli elementi sottodiagonali si ha $1 = \ell_i u_i$ per $i = 1, \ldots, n-1$. Si ottiene quindi

$$
\begin{aligned}
& u_1 = a_1 \\
& u_i = a_i - b_{i-1}/u_{i-1}, \quad \ell_{i-1} = 1/u_{i-1}, \qquad i = 2, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Per quanto riguarda la stabilità all'indietro, denotando con $\widetilde{u}_i$ i valori effettivamente calcolati in aritmetica floating point con precisione di macchina μ al posto degli u_i e denotando con ϵ_i, δ_i gli errori locali generati dalle operazioni rispettivamente di divisione e di sottrazione nel calcolo di u_i, vale

$$
\widetilde{u}_i = (a_i - (b_{i-1}/\widetilde{u}_{i-1})(1 + \epsilon_i))(1 + \delta_i), \quad i = 2, \ldots, n,
$$

con $\widetilde{u}_1 = u_1$ e $|\epsilon_i|, |\delta_i| < \mu$. Per cui i valori effettivamente calcolati $\widetilde{u}_i$ coincidono con i valori esatti ottenuti applicando la formula a $\widetilde{a}_i = a_i(1 + \delta_i)$ e $\widetilde{b}_{i-1} = b_{i-1}(1+\delta_i)(1+\epsilon_i) \doteq b_{i-1}(1+\delta_i+\epsilon_i)$. Vale quindi $|\tilde{a}_i - a_i|/|a_i| < \mu$, $|\tilde{b}_i - b_i|/|b_i| < 2\mu + \mu^2$.

Il codice Octave è il seguente

```
function [l,u]=trid_lu(a,b)
  n=length(a);
  u(1)=a(1);
  for i=1:n-1
    u(i+1)=a(i+1)-b(i)/u(i);
    l(i)=1/u(i);
  end
```