Compito di Analisi Numerica, a.a.2014-2015, Appello 5, 1/9/2015

Esercizio 1.
Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(\alpha) = 0$.
a) Assumendo sufficiente regolarità per $f(x)$ e sapendo che in α la funzione cambia convessità, analizzare l'ordine di convergenza del metodo di Newton in un intorno di α.
b) Assumendo sufficiente regolarità per $f(x)$, dimostrare che se $f'(x)f''(x) > 0$ per $x < \alpha$ e $f'(x)f''(x) < 0$ per $x > \alpha$ allora la convergenza è alternata.
c) Attraverso esempi analizzare la convergenza nel caso in cui la funzione $f(x)$ è tale che $\lim_{x\to\alpha^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\alpha^+} f'(x) = +\infty$.

Esercizio 2.
Sia $A = (a_{i,j})$ una matrice $n \times n$ tale che $a_{i,i} > 0$, per $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,j} \leq 0$ per $i, j = 1, \ldots, n$, $i \neq j$.
a) Dimostrare che se esiste un vettore $u = (u_i)$ tale che $u_i > 0$ per cui $v = Au$ ha componenti $v_i > 0$, allora i metodi di Jacobi e di Gauss-Seidel applicati ad un sistema con matrice A sono convergenti.
b) Dimostrare analoga proprietà nel caso in cui A è in aggiunta irriducibile e $v_i \geq 0$.
c) Dire se valgono analoghe proprietà nel caso in cui esiste un vettore u di componenti positive tale che $v^T = u^T A$ ha componenti positive (non negative e A è irriducibile).

Esercizio 3.
Dati due polinomi $a(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $b(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ di gradi n ed m con $n \geq m$, descrivere un algoritmo che calcola quoziente e resto della divisione di $a(x)$ per $b(x)$. Scrivere una function nella sintassi di Octave che prende in input i vettori dei coefficienti di due polinomi $a(x)$ e $b(x)$, dà in uscita i vettori dei coefficienti del polinomio quoziente e del polinomio resto della divisione di $a(x)$ per $b(x)$ e non usa la function `deconv`.

Risoluzione Esercizio 1.
a) Poiché $f(x)$ cambia convessità in α allora, se $f''(x)$ è continua vale $f''(\alpha) = 0$.

Consideriamo prima il caso in cui $f'(\alpha) \neq 0$. Per $g(x) = x - f(x)/f'(x)$ vale $g'(x) = f(x)f''(x)/f'(x)^2$, $g''(x) = f(x)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)' + f'(x)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)$ per cui $g''(\alpha) = 0$ e per un risultato visto a lezione, per $g(x)$ sufficientemente regolare il metodo ha almeno ordine 3. Derivando ancora una volta si ha $g'''(x) = 2f'(x)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)' + f(x)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)'' + f''(x)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)$. Per cui $g'''(\alpha) = 2f'(\alpha)\left(\frac{f''(x)}{f'(x)^2}\right)'|_{x=\alpha}$ che vale $\frac{f'''(\alpha)}{f'(\alpha)^2}$. Quindi se $f'''(\alpha) \neq 0$ l'ordine è 3.

Se invece $f'(\alpha) = 0$ allora, essendo anche $f''(\alpha) = 0$ si ha che α è uno zero di molteplicità $p \geq 3$ dove $p = 3$ se $f'''(\alpha) \neq 0$. Per cui, per un teorema visto a lezione la convergenza è lineare con fattore $\gamma = 1 - 1/p \geq 2/3$.

b) Vale $g(x) - \alpha = (x - \alpha)g'(\xi)$ per ξ appartenente all'intervallo di estremi x e α. Vale inoltre $g'(\xi) = f(\xi)f''(\xi)/f'(x)^2$. Se $f'(x) > 0$ per $x < \alpha$ allora, essendo $f(\alpha) = 0$ deve essere $f(x) < 0$ per $x < \alpha$ per cui $g'(\xi) < 0$. Se d'altro canto $f'(x) < 0$ per $x < \alpha$ allora $f(x) > 0$ per $x < \alpha$ e per ipotesi $f''(x) < 0$, quindi $g'(\xi) < 0$ per $\xi < \alpha$. Questo implica che $g(x) > \alpha$. Analogamente si ragiona per mostrare che se $x > \alpha$ allora $g(x) < \alpha$.

c) In questo caso ci può essere o non essere convergenza. Esempio: $f(x) = x^{1/p}$ per $x \geq \alpha = 0$, $f(x) = -(-x)^{1/p}$ per $x < 0$, $p > 1$. La funzione è simmetrica basta quindi esaminare cosa succede per $x > 0$. Per $x > 0$ si ha $f'(x) = \frac{1}{p}x^{\frac{1-p}{p}}$ per cui $\lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$. Per simmetria si ha $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = -\infty$. Inoltre $g(x) = x - \frac{x^{1/p}}{\frac{1}{p}x^{\frac{1-p}{p}}} = (1-p)x$. Per cui, se $0 < p < 2$ si ha convergenza lineare alternata ad $\alpha = 0$ con fattore di convergenza $1 - p$, se $p \geq 2$ non si ha convergenza essendo $|g(x)| > |x|$.

Risoluzione Esercizio 2.
a) Se $\widehat{D} = \mathrm{diag}(u)$ ed $e = (1, 1, \ldots, 1)^T$ allora $u = \widehat{D}e$ e $\widehat{A} = A\widehat{D}$ è tale che $\widehat{A}e = A\widehat{D}e = Au = v > 0$. Cioè, posto $\widehat{A} = (\widehat{a}_{i,j})$, vale $\widehat{a}_{i,i} + \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \widehat{a}_{i,j} > 0$. Quindi, poiché $\widehat{a}_{i,i} = a_{i,i}u_i > 0$ e $\widehat{a}_{i,j} = a_{i,j}u_j \leq 0$ per $i \neq j$, ne segue che $|\widehat{a}_{i,i}| = \widehat{a}_{i,i} > -\sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} \widehat{a}_{i,j} = \sum_{j=1,\, j\neq i}^{n} |\widehat{a}_{i,j}|$. Quindi $\widehat{A}$ è fortemente dominante diagonale, e la matrice di iterazione $\widehat{J}$ del metodo di Jacobi applicato ad $\widehat{A}$ ha raggio spettrale $\rho(\widehat{J}) < 1$ per un teorema visto a lezione. D'altro canto la matrice di iterazione J del metodo di Jacobi applicato ad A è tale che $\widehat{J} = \widehat{D}^{-1}J\widehat{D}$ quindi J e $\widehat{J}$ hanno stessi autovalori e quindi stesso raggio spettrale per cui $\rho(J) < 1$. Nel caso b) si procede in modo analogo al caso a). Nel caso c) basta applicare i punti a) e b) alla matrice A^T.

Risoluzione Esercizio 3. Sia $q(x) = \sum_{i=0}^{n-m} q_i x^i$ il quoziente e $r(x) = \sum_{i=0}^{m-1} r_i x^i$ il resto della divisione di $a(x)$ e $b(x)$, cioè

$$a(x) = b(x)q(x) + r(x). \tag{1}$$

Se $m > n$ si ha $q(x) = 0$, $r(x) = a(x)$. Altrimenti dalla (1) si ricava $q_{n-m} = a_n/b_m$ da cui $a(x) - q_{n-m}x^{n-m}b(x) = b(x)(q(x) - q_{n-m}x^{n-m}) + r(x)$, cioè

$\hat{a}(x) = b(x)\hat{q}(x) + r(x), \quad \hat{a}(x) = a(x) - q_{n-m}x^{n-m}b(x)$. Quindi

$$\hat{a}_{n-i} = a_{n-i} - \frac{a_n}{b_m} b_{m-i}, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Il polinomio $\hat{a}(x)$ ha grado $n-1$ e, $\hat{q}(x)$ è il quoziente della divisione di $\hat{a}(x)$ per $b(x)$. Quindi se $n-1 \geq m$ si riapplica la stessa procedura per il calcolo di quoziente e resto della divisione di $\hat{a}(x)$ per $b(x)$.

Se si adotta la convenzione che `a(i)` denota il coefficiente di a_{i-1} per $i = 1, \ldots, n+1$ e analogamente per i polinomi $b(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ allora si ha la function seguente in cui si assume che i dati siano consistenti, cioè $b_m \neq 0$.

```
function [q, r] = quoziente_resto1(a,b);
n = length(a)-1;   m = length(b)-1;
if n<m
  q = 0;  r = a;
  return
end
for k=n+1:-1:m+1
  q(k-m) = a(k)/b(m+1);
  a(k-m:k) = a(k-m:k) -q(k-m)*b;
end
r = a(1:m);
```

Se invece si denota con `a(i)` il coefficiente $a(n-i+1)$, per $i = 1, \ldots, n+1$ e similmente per i polinomi $b(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ allora si ha la function

```
function [q, r] = quoziente_resto2(a,b);
n = length(a)-1;   m = length(b)-1;
if n<m
  q = 0;  r = a;
  return
end
for k=1:n-m+1
  q(k) = a(1)/b(1);
  a(1:m+1) = a(1:m+1)-q(k)*b
  a(1:n+1-k) = a(2:n-k+2);
end
r = a(1:m);
```