Compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 5, 5/9/2014

Esercizio 1. Si determinino gli zeri della seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \log x & \text{se } x > 0 \\ -x - x^2 & \text{se } x \le 0 \end{cases}$$

Per ogni zero si valuti la convergenza del metodo di Newton applicato a $f(x)$ valutando in particolare l'ordine di convergenza e la monotonia/alternanza della convergenza.

Esercizio 2. Dare condizioni migliori possibile sul parametro $a > 0$ affinchè il metodo di Jacobi applicato ad un sistema con matrice $n \times n$, $n > 4$,

$$A = \begin{bmatrix} a & -1 & & & \\ -1 & a & -1 & & \\ & \ddots & 2 & \ddots & \\ & & -1 & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

sia convergente. Rispondere alla stessa domanda nel caso del metodo ierativo indotto dal partizionamento $A = M - N$ dove $M = \mathrm{diag}(\left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{smallmatrix}\right], 2I_{n-2})$, e nel caso del partizionamento in cui $M = \mathrm{diag}(\left[\begin{smallmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{smallmatrix}\right], \mathrm{trid}_{n-2}(-1, 2, -1))$. Abbiamo denotato I_m la matrice identica di dimensioni $m \times m$ e $\mathrm{trid}_m(-1, 2-1)$ la matrice tridiagonale di dimensione $m \times m$ con elementi uguali a 2 sulla diagonale principale e uguali a -1 sulla sopra-diagonale e sulla sotto-diagonale.

Esercizio 3. Scrivere una function nella sintassi di Octave che, preso in input una matrice reale X e un numero intero $k > 0$, calcola la matrice $Y = f(X) = \sum_{i=0}^{2^k-1} X^i$ mediante la formula

$$f(X) = (I + X)(I + X^2)(I + X^4) \cdots (I + X^{2^{k-1}}),$$

dove X^{2^i} viene calcolata come $(X^{2^{i-1}})^2$, in modo che vengano svolte solo $2(k-1)$ moltiplicazioni tra matrici.