Compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 3, 3/6/2014

Esercizio 1. Siano $f(x) \in C^4(\mathbb{R})$, $y(x) \in C^3(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tali che $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) \neq 0$, $y(\alpha) = \alpha$, $y'(\alpha) = 1/2$.
a) Dimostrare che il metodo iterativo definito da $g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(y(x))}$ converge localmente ad α con ordine almeno 3.
b) (Facoltativo) Dimostrare il risultato nel caso $f(x) \in C^3(\mathbb{R})$ e $y(x) \in C^2(\mathbb{R})$.
c) Nel caso $f(x) = x^2 - a$ con $a > 0$ e $y(x) = x - \frac{1}{2}f(x)/f'(x)$ confrontare l'efficienza del metodo con quella dell'iterazione di Newton applicata a $f(x)$.
d) Nelle ipotesi del punto c), posto $\alpha = \sqrt{a}$, dimostrare che $g(x) - \alpha = (x-\alpha)^3/(3x^2+a)$ e che se $1/2 \le a < 1$ la successione definita da $x_k = g(x_{k-1})$, $x_0 = 1$ converge decrescendo ad α e $|x - \alpha| < 1/2^{3^k}$. Determinare il minimo numero di passi k per cui x_k approssima $\sqrt{a}$ con 53 cifre significative in base 2.

Esercizio 2. Sia $A_n = (a_{i,j})$ matrice $n \times n$, $n \ge 2$, tale che $a_{i,i} = 2$, $i = 1, \ldots, n$, $a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = 1$, $i = 2, \ldots, n-1$, $a_{1,2} = a_{2,1} = \alpha \in \mathbb{R}$, $a_{i,j} = 0$ altrove.
a) Usando i teoremi di Gerschgorin dimostrare che se $|\alpha| \le \sqrt{2}$ allora la matrice A_n è invertibile.
b) Dimostrare che $\det A_n = 2n - (n-1)\alpha^2$
c) Dedurre che se $|\alpha| \le \sqrt{2}$ allora per ogni valore di n la matrice A_n ammette unica la fattorizzazione LU, e che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\alpha \in (\sqrt{2}, \sqrt{2} + \epsilon]$ ed un intero n_ϵ per cui per ogni valore di $n > n_\epsilon$ la matrice A_n non ammette la fattorizzazione LU.
d) Descrivere un algoritmo per il calcolo delle matrici L ed U della fattorizzazione $A_n = LU$ e valutarne il costo computazionale in termini di operazioni aritmetiche.

Esercizio 3. Scrivere una *function* nella sintassi di Octave che prende in input due vettori x e u reali e dà in output il vettore y ottenuto moltiplicando x per la matrice di Householder definita dal vettore u, e che impieghi un numero di operazioni aritmetiche proporzionale alla lunghezza dei vettori.

Scrivere poi una function che dato il vettore reale x dà in output il vettore u e la costante β tali che $P = I - \beta uu^T$ è la matrice di Householder per cui $Px = \alpha e_1$, dove $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T$ e che non produce cancellazione numerica.