Compito di Analisi Numerica, a.a.2013-2014, Appello 1
17/1/2014

Esercizio 1.
a) Sia $n \geq 2$ intero e $b \in \mathbb{R}$. Sia A la matrice tridiagonale $(2n)\times(2n)$ con elementi diagonali $a_{i,i} = ib$, $a_{n+i,n+i} = i(b-1)$, per $i = 1,\ldots,n$, inoltre $a_{i,i+1} = b^2$, $a_{i+1,i} = -b^2$, per $i = 1,\ldots,2n-1$. Si dimostri che se $0 < b \leq 1/2$ allora A ha n autovalori con parte reale positiva e n autovalori con parte reale negativa.
b) Si diano condizioni sufficienti su b affinché A abbia n autovalori reali positivi.

Esercizio 2.
a) Sia $n \geq 2$ intero e $m = 2$. Dimostrare che se una matrice $n \times n$ H ha un autovalore λ di molteplicità geometrica m allora λ appartiene ad almeno m cerchi di Gerschgorin di H. Cioè esistono due indici $h \neq k$ tali che $\lambda \in C_k \cap C_h$, dove C_i denota il cerchio di Gerschgorin relativo all'i-esima riga di H.
b) (Facoltativo) Dimostrare la proprietà del punto a) per m generico. Dire se la proprietà vale per la molteplicità algebrica, dare eventualmente un controesempio.

Esercizio 3. Determinare un polinomio $p(x)$ di grado più basso possibile a coefficienti razionali tale che $p(\sqrt{2}) = 0$ e il metodo di Newton applicato a $p(x)$ abbia ordine di convergenza almeno 3. Si dica se il metodo ottenuto è più efficiente del metodo di Newton applicato alla funzione $x^2 - 2$ tenendo conto del costo computazionale per passo e dell'ordine di convergenza, dove si assume che le costanti razionali coinvolte nell'iterazione sono assegnate.

Esercizio 4. Siano $a = (a_i) \in \mathbb{R}^n$ e $b = (b_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$ tali che esiste la fattorizzazione LU della matrice tridiagonale A:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & \\ 1 & a_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ & & 1 & a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \ell_1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ell_{n-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & b_1 & & \\ & u_2 & \ddots & \\ & & \ddots & b_{n-1} \\ & & & u_n \end{bmatrix}$$

Denotati con $u = (u_i) \in \mathbb{R}^n$ e $\ell = (\ell_i) \in \mathbb{R}^{n-1}$, scrivere le relazioni che esprimono le componenti di u e di ℓ in funzione delle componenti di a e b. Dimostrare che il calcolo delle u mediante queste formule è numericamente stabile all'indietro. Scrivere una function nella sintassi di Octave che presi in input i vettori a e b fornisce in output i vettori u ed ℓ.