Esame di Analisi Numerica, quinto appello a.a. 2005-2006
7/7/2006

Esercizio 1. Sia n un intero positivo e siano $x_i \in (0,1)$, $i = 0,\dots,n$ tali che $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$. Si definiscano inoltre le funzioni $g_i(x) = x^i + x^{-i}$, $i = 0,\dots,n$.
a) Si consideri la matrice $(n+1)\times(n+1)$ $V(x) = (v_{i,j})_{i,j=0,n}$ tale che $v_{i,j} = g_j(x_i)$ per $i \neq n$ e $v_{n,j} = g_j(x)$. Si dimostri che se $\det V(\xi) = 0$ allora $\det V(\xi^{-1}) = 0$ e che $\det V(\xi) = 0$, $\xi \in (0,1)$ se e solo se $\xi = x_i$.
b) Si dimostri che il problema di interpolazione nello spazio delle funzioni $g_i(x)$, $i = 0,\dots,n$ relativo ai nodi x_i ha una e una sola soluzione, cioè, per ogni $(n+1)$-upla $y_0,\dots,y_n \in \mathbb{R}$ esistono unici $a_0,\dots,a_n$ tali che, posto $\phi(x) = \sum_{j=0}^n a_j g_j(x)$, vale $\phi(x_i) = y_i$, $i = 0,\dots,n$.
c) (Facoltativo) Si dia un'espressione per $\phi(x)$ e un algoritmo per il calcolo di $\phi(x)$ in un punto ξ di costo $O(n^2)$.

Esercizio 2. Si consideri il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ dove la matrice $n\times n$ $A = (a_{i,j})$ è tale che $a_{i,j} = d_i$ se $i = j$, $a_{1,j} = v_j$, se $j > 1$, $a_{i,1} = u_i$ se $i > 1$ e $a_{i,j} = 0$ altrimenti.
a) Si consideri il metodo iterativo dato dal partizionamento $A = M - N$ con $M = (m_{i,j})$, $m_{1,1} = \alpha$, $m_{i,j} = a_{i,j}$ per $i \geq j$ e $(i,j) \neq (1,1)$. Dare condizioni sui valori di u_i e v_i affinché esista un α per cui il metodo è convergente.
b) Determinare il valore ottimale di α che massimizza la velocità di convergenza.
c) Se $\alpha = 0$ e $\sum_{i=2}^n u_i v_i = 0$ determinare il numero di passi del metodo iterativo sufficienti a ridurre l'errore iniziale di un fattore 10^{-10}.

Esercizio 3: Sia $\mathcal{F}$ l'insieme dei numeri *floating point* con precisione u. Sia $\mathrm{SIN}(x) : F \to F$ tale che $\mathrm{SIN}(x) = \sin(x(1+\delta))$ con $|\delta| < u$. Si dimostri mediante un'analisi al primo ordine che il calcolo in *floating point* di $f(x,y,z,t) = t\sin(x^2) + zx\sin(yx)$ mediante l'espressione $\mathrm{fl}(f(x,y,z,t)) = t\otimes\mathrm{SIN}(x\otimes x)\oplus z\otimes x\otimes\mathrm{SIN}(y\otimes x)$, dove $\oplus,\otimes$ indicano rispettivamente le operazioni $+,\times$ in *floating point*, è numericamente stabile all'indietro; esistono cioè numeri reali δ_x, δ_y, δ_z, δ_t tali che $\mathrm{fl}(f(x,y,z,t)) = f(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z},\tilde{t})$ con $\tilde{x} = x(1+\delta_x)$, $\tilde{y} = y(1+\delta_y)$, $\tilde{z} = z(1+\delta_z)$, $\tilde{t} = t(1+\delta_t)$. Si diano maggiorazioni a $|\delta_x|, |\delta_y|, |\delta_z|, |\delta_t|$ e all'errore algoritmico.

Esercizio 4. Si scriva una *function* in Fortran 90 che dati un intero n e un reale x calcoli la funzione $f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\cos(x*i)\sum_{j=i}^n \sin(x*j)\right)$