Esame di Analisi Numerica, quarto appello a.a. 2005-2006
13/6/2006

Esercizio 1. Siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} = (u_i)$, $\boldsymbol{v} = (v_i)$, $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$ e $A = I_n - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ dove $n \geq 2$ e I_n è la matrice identica di ordine n.
a) Si diano condizioni su $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ affinché esista e sia unica la fattorizzazione LU di A.
b) Si esprima in funzione di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$ la matrice elementare di Gauss L_1 per cui $\widehat{A} = L_1 A$ ha la prima colonna proporzionale ad $\boldsymbol{e}_1$.
c) Si dimostri che la sottomatrice principale di coda (complemento di Schur) di $\widehat{A}$ di dimensione $n-1$ è del tipo $I_{n-1} - \hat{\boldsymbol{u}}\hat{\boldsymbol{v}}^T$ e si diano espressioni per $\hat{\boldsymbol{u}}$ e $\hat{\boldsymbol{v}}$.
d) Si dia un algoritmo per il calcolo degli elementi delle matrici L ed U della fattorizzazione $A = LU$ cercando di minimizzare il numero delle operazioni aritmetiche impiegate. Se ne valuti il costo computazionale.

Esercizio 2. Sia $g(x) : [a, b] \to [a, b]$ continua tale che $g(\alpha) = \alpha$, dove $a < \alpha < b$. Sia $\{x_k\}_{k \geq 0}$ la successione definita da $x_{k+1} = g(x_k)$ a partire da $x_0 \in [a, b]$.
a) Si dimostri che se valgono le implicazioni $x \in [a, b]$, $x > \alpha \Rightarrow 0 < g(g(x)) - \alpha < x - \alpha$, e $x \in [a, b]$, $x < \alpha \Rightarrow 0 < \alpha - g(g(x)) < \alpha - x$, allora per ogni $x_0 \in [a, b]$ le sottosuccessioni x_{2k} e x_{2k+1} convergono in modo monotono ad α.
b) Si determinino i punti fissi di $g(x) = ax^2/(3x - 2)$ per $a \neq 0$ e si dica per quali valori di a la successione $\{x_k\}$ è localmente convergente ai punti fissi. Si determini l'ordine di convergenza. Si studi in particolare il caso $a = 1$.
c) Per $a = 1$ si determinino gli insiemi dei punti x_0 per cui la successione x_k rispettivamente converge a 0, converge a 1, non converge, non è definita.

Esercizio 3. Per calcolare la funzione $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{i} x_{n-j+1}$ si consideri l'algoritmo seguente

$$s_1 = x_1, \quad s_i = (1 + s_{i-1})x_i, \quad i = 2, \ldots, n.$$

a) Si dimostri che l'esecuzione dell'algoritmo in aritmetica *floating point* genera dei numeri di macchina $\tilde{s}_i$ tali che $\tilde{s}_i = (1 + \tilde{s}_{i-1})\tilde{x}_i$, per $i = 2, \ldots, n$ dove $\tilde{x}_i = x_i(1 + \epsilon_i)$ e $|\epsilon_i| \leq 2u + O(u^2)$ e u è la precisione dell'aritmetica.
b) Nell'ipotesi che i dati x_i siano compresi tra 0 e 1, si maggiorino i coefficienti di amplificazione di $f(x_1, \ldots, x_n)$ e si usi il risultato del punto a) per dare una maggiorazione al primo ordine dell'errore algoritmico.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che presi in input un intero n e i vettori $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ calcoli e dia in output il vettore $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$ dove $A = (a_{i,j})$ è la matrice definita da $a_{i,j} = u_i v_j$ se $i \geq j$, $a_{i,j} = v_i u_j$ se $i < j$ evitando di allocare una matrice $n \times n$ e contenendo il costo computazionale ad $O(n)$ operazioni aritmetiche.