Compito di Analisi Numerica, a.a. 2005-2006
terzo appello, 21 Aprile 2006

Esercizio 1. Per n intero positivo, siano $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ e D una matrice $n \times n$ diagonale tale che $\det D \neq 0$. Per risolvere il sistema lineare $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ con $A = D + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ si consideri il metodo iterativo $\boldsymbol{x}_{k+1} = M^{-1}(N\boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{b})$ dove $A = M - N$ e $M = \alpha D$, con $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$.
a) Dire sotto quali condizioni su $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, D$ esiste un α per cui il metodo iterativo è convergente e determinare il raggio spettrale di $P = M^{-1}N$.
b) Determinare il valore di α che minimizza il raggio spettrale di P.
c) Si dimostri che per $\alpha = 1$ l'errore di approssimazione $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}$ ottenuto dopo un passo a partire da un qualunque $\boldsymbol{x}_0$ è proporzionale a $D^{-1}\boldsymbol{u}$. Se $\boldsymbol{v} = D^{-1}\boldsymbol{u}$ si usi questa proprietà per determinare $\boldsymbol{x}_0$ tale che $\boldsymbol{e}_1 = 0$.

Esercizio 2. Siano $g_1(x)$ e $g_2(x)$ due funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili con continuità. Si consideri la successione generata a partire da $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ dalla relazione $x_{k+1} = g_1(x_k) + g_2(x_{k-1})$, $k = 0, 1, \ldots$.
a) Si dimostri che se esiste $\lim_k x_k = \alpha$ allora $\alpha = g_1(\alpha) + g_2(\alpha)$ e che per ogni $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ esistono $\xi_k, \eta_k \in \mathbb{R}$ tali che $e_{k+1} = g_1'(\xi_k)e_k + g_2'(\eta_k)e_{k-1}$, per $k = 1, 2, \ldots$, dove $e_k = x_k - \alpha$.
b) Riscrivendo l'espressione $e_{k+1} = g_1'(\xi_k)e_k + g_2'(\eta_k)e_{k-1}$ nella forma

$$\boldsymbol{v}^{(k+1)} = \begin{bmatrix} g_1'(\xi_k) & 2g_2'(\eta_k) \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{v}^{(k)}, \quad \text{con} \quad \boldsymbol{v}^{(k)} = \begin{bmatrix} e_k \\ \frac{1}{2}e_{k-1} \end{bmatrix}$$

si dimostri che se $|g_1'(\xi)| + 2|g_2'(\eta)| \leq \lambda < 1 \ \forall \xi, \eta \in \Omega = \{x : |x - \alpha| \leq \rho\}$ allora $\forall\, x_0, x_1 \in \Omega$ vale $x_k \in \Omega$, $||\boldsymbol{v}_k||_\infty \leq \rho \max(1/2, \lambda)^{k-1}$, per $k \geq 1$, e $\lim_k x_k = \alpha$.
c) Sotto le condizioni del punto b) si provi che α è l'unico punto fisso di $g_1(x) + g_2(x)$ in Ω.
d) (Facoltativo) Dire se la condizione $|g_1'(\xi)| + |g_2'(\eta)| \leq \lambda < 1$, $\forall \xi, \eta \in \Omega$, è sufficiente per la convergenza.

Esercizio 3. Per calcolare l'espressione $f(a, b, c, d) = (a^2 + bc)/(c + d)$ si consideri l'algoritmo: $s_1 = a * a$, $s_2 = b * c$, $s_3 = c + d$, $s_4 = s_1 + s_2$, $s_5 = s_4/s_3$. Si provi che tale algoritmo è numericamente stabile all'indietro nei punti in cui $f(a, b, c, d)$ è definita, dimostrando che il valore $\varphi(a, b, c, d)$ effettivamente calcolato in aritmetica *floating point* è uguale a $f(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d})$ per opportuni valori $\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$. Si diano limitazioni superiori alle perturbazioni $|a - \tilde{a}|$, $|b - \tilde{b}|$, $|c - \tilde{c}|$, $|d - \tilde{d}|$.

Esercizio 4. Si scriva una subroutine in Fortran 90 che, presi in input un intero n e i vettori reali $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x}$ di n componenti, dia in output il vettore $\boldsymbol{y} = D^{-1}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{x})$ (ottenuto a partire da $\boldsymbol{x}$ dopo un passo del metodo iterativo dell'esercizio 1 con $\alpha = 1$), dove D è la matrice diagonale con elementi diagonali d_i, $i = 1, \ldots, n$.