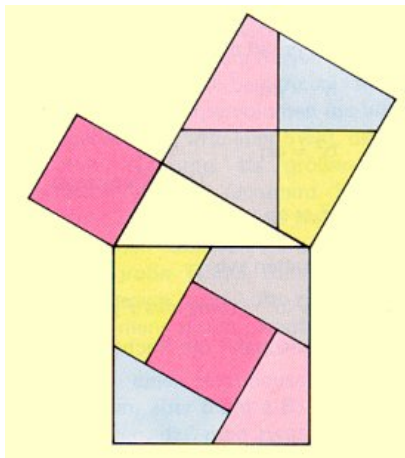


# Il paradosso di Banach-Tarski

Alessandro Berarducci

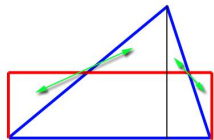
Osservatorio Astronomico, valle di S. Barthélemy,  
11 Settembre 2017

# Il teorema di Pitagora



La dimostrazione per “dissezioni” di Henry Perigal (1801-1898), agente di cambio e matematico dilettante.

## Calcolo delle aree per dissezioni



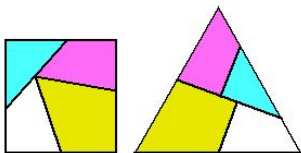
Area del triangolo = base x altezza / 2

# Congruenza per dissezioni

Teorema di Wallace-Bolyai-Gerwien: Due poligoni della stessa area sono congruenti per dissezioni, ovvero è sempre possibile suddividere il primo in un numero finito di parti poligonali che possono essere ricomposte in modo da formare il secondo.

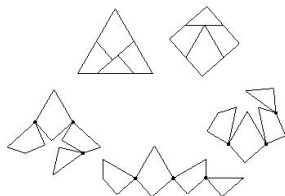
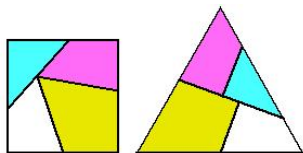
## Congruenza per dissezioni

Teorema di Wallace-Bolyai-Gerwien: Due poligoni della stessa area sono congruenti per dissezioni, ovvero è sempre possibile suddividere il primo in un numero finito di parti poligonali che possono essere ricomposte in modo da formare il secondo.



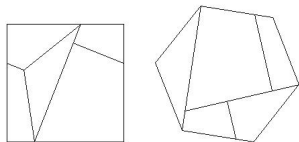
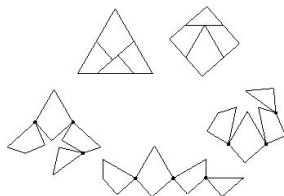
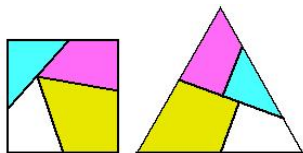
# Congruenza per dissezioni

Teorema di Wallace-Bolyai-Gerwien: Due poligoni della stessa area sono congruenti per dissezioni, ovvero è sempre possibile suddividere il primo in un numero finito di parti poligonali che possono essere ricomposte in modo da formare il secondo.



# Congruenza per dissezioni

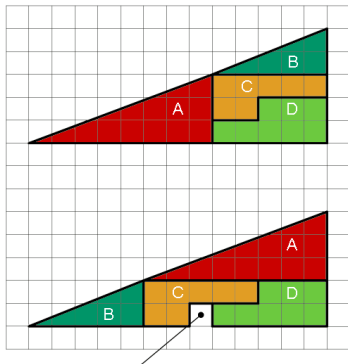
Teorema di Wallace-Bolyai-Gerwien: Due poligoni della stessa area sono congruenti per dissezioni, ovvero è sempre possibile suddividere il primo in un numero finito di parti poligonali che possono essere ricomposte in modo da formare il secondo.



Si dimostra inoltre che un poligono non è mai congruente per dissezioni ad un poligono “più grande”,

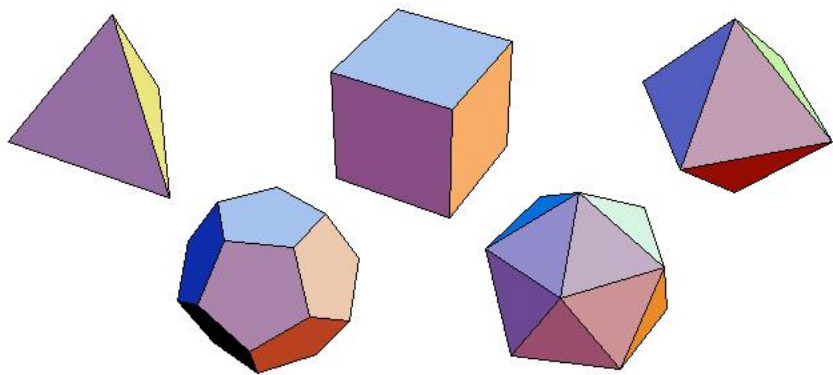


Si dimostra inoltre che un poligono non è mai congruente per dissezioni ad un poligono “più grande”, ovvero non può accadere la cosa seguente:

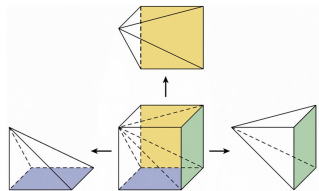


Un puzzle di Henry Ernest Dudeney, 1857-1930

## 3 Dimensioni

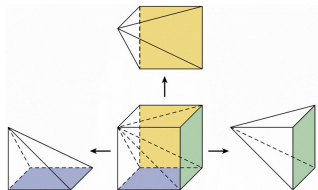


# Calcolo dei volumi



Volume della piramide =  
 $\text{base} \times \text{altezza} / 3$

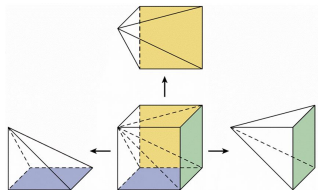
## Calcolo dei volumi



Volume della piramide =  
 $\text{base} \times \text{altezza} / 3$

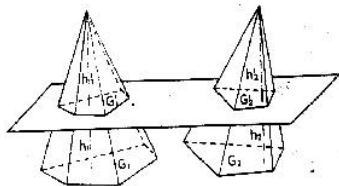
Se la piramide ha un'altra forma non bastano le dissezioni, serve anche il principio di Cavalieri.

# Calcolo dei volumi



Volume della piramide =  
 $\text{base} \times \text{altezza} / 3$

Se la piramide ha un'altra forma non bastano le dissezioni, serve anche il principio di Cavalieri.



Bonaventura Cavalieri,  
1598-1647

# Teorema di Dehn

Un cubo e un tetraedro dello stesso volume non sono congruenti per dissezioni, ovvero non è possibile suddividere il cubo in un numero finito di poliedri che possono essere ricomposti (tramite isometrie) in modo da formare il tetraedro.



Max Dehn,  
1878-1952

# Principio di continuità

Alla luce del risultato di Dehn, potrebbe sorgere il dubbio se esista un cubo dello stesso volume di un tetraedro. Una risposta positiva è fornita dal principio di continuità: se teniamo fisso il tetraedro e ingrandiamo progressivamente un cubo inizialmente molto piccolo, dobbiamo necessariamente passare da cubi di volume decisamente inferiore a cubi di volume decisamente superiore a quello del tetraedro, e per continuità il volume dovrà passare per tutte le misure intermedie, assumendo anche esattamente quella del tetraedro.

?



?

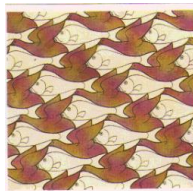


Cosa succede se ammettiamo  
suddivisioni in pezzi più  
complicati dei poliedri? Continua  
a valere il teorema “negativo” di  
Dehn?

?



Cosa succede se ammettiamo  
suddivisioni in pezzi più  
complicati dei poliedri? Continua  
a valere il teorema “negativo” di  
Dehn?



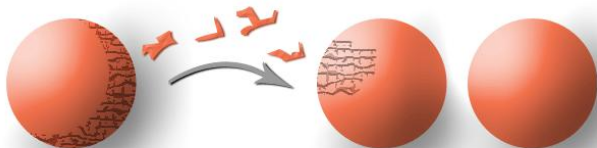
# Teorema di Banach-Tarski

Dati due solidi qualsiasi con parte interna non vuota è possibile partizionare il primo in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti in modo da formare il secondo.

# Teorema di Banach-Tarski

Dati due solidi qualsiasi con parte interna non vuota è possibile partizionare il primo in un numero finito di pezzi che possono essere ricomposti in modo da formare il secondo.

In particolare, è possibile partizionare un solido sferico in 5 parti (un po' complicate) che possono essere ricomposte in modo da formare due sfere dello stesso volume della sfera data.



# Equiscomposizioni

Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero di pezzi in modo che a ciascun pezzo di  $X$  ne corrisponda uno in  $Y$  a lui congruente;

# Equiscomposizioni

Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero di pezzi in modo che a ciascun pezzo di  $X$  ne corrisponda uno in  $Y$  a lui congruente;

$X \prec Y$  se  $X$  è equiscomponibile con un sottoinsieme di  $Y$ .

# Equiscomposizioni

Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero di pezzi in modo che a ciascun pezzo di  $X$  ne corrisponda uno in  $Y$  a lui congruente;

$X \prec Y$  se  $X$  è equiscomponibile con un sottoinsieme di  $Y$ .



Stephan Banach,  
1892-1945

Teorema di Banach-Schröder-Bernstein:  
Se  $X \prec Y$  e  $Y \prec X$  allora  $X \sim Y$ .

# Equiscomposizioni

Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero di pezzi in modo che a ciascun pezzo di  $X$  ne corrisponda uno in  $Y$  a lui congruente;

$X \prec Y$  se  $X$  è equiscomponibile con un sottoinsieme di  $Y$ .



Stephan Banach,  
1892-1945

Teorema di Banach-Schröder-Bernstein:  
Se  $X \prec Y$  e  $Y \prec X$  allora  $X \sim Y$ .

$X$  si dice paradossale se esistono due sottoinsiemi disgiunti  $A, B$  di  $X$  tale che  $X \sim A \sim B$ .



# Equiscomposizioni

Scriviamo  $X \sim Y$  se  $X$  ed  $Y$  sono equiscomponibili, ovvero se è possibile partizionare  $X$  ed  $Y$  nello stesso numero di pezzi in modo che a ciascun pezzo di  $X$  ne corrisponda uno in  $Y$  a lui congruente;

$X \prec Y$  se  $X$  è equiscomponibile con un sottoinsieme di  $Y$ .



Stephan Banach,  
1892-1945

Teorema di Banach-Schröder-Bernstein:  
Se  $X \prec Y$  e  $Y \prec X$  allora  $X \sim Y$ .

$X$  si dice paradossale se esistono due sottoinsiemi disgiunti  $A, B$  di  $X$  tale che  $X \sim A \sim B$ .

Il teorema di Banach-Tarski dice dunque che la sfera solida è paradossale.

## Il problema dei bordi

Nelle **congruenze per dissezioni** di poligoni o poliedri si trascuravano i bordi, ovvero si permettevano sovrapposizioni di pezzi lungo il bordo.

## Il problema dei bordi

Nelle **congruenze per dissezioni** di poligoni o poliedri si trascuravano i bordi, ovvero si permettevano sovrapposizioni di pezzi lungo il bordo.

Nelle **equiscomposizioni** alla Banach-Tarski non permettiamo sovrapposizioni neppure lungo i bordi.

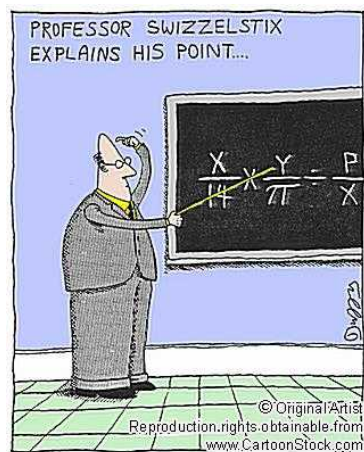
## Il problema dei bordi

Nelle **congruenze per dissezioni** di poligoni o poliedri si trascuravano i bordi, ovvero si permettevano sovrapposizioni di pezzi lungo il bordo.

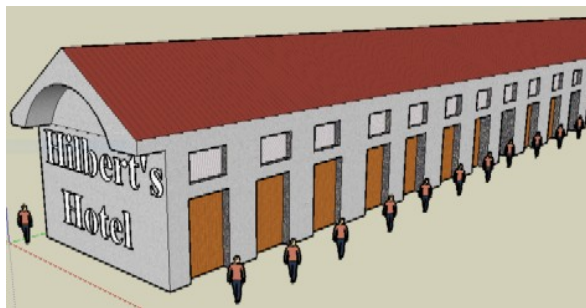
Nelle **equiscomposizioni** alla Banach-Tarski non permettiamo sovrapposizioni neppure lungo i bordi.



# Passiamo alla dimostrazione

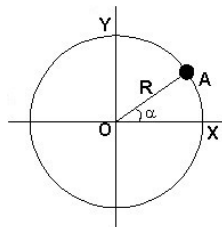


# Un esercizio di riscaldamento



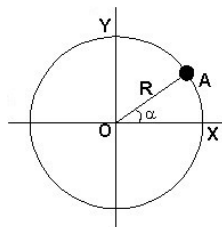
## Un esercizio di riscaldamento

Un disco è scomponibile in due pezzi  $R, S$  che possono essere ricomposti in modo da formare lo stesso disco privato di un raggio (tenendo però il centro).



## Un esercizio di riscaldamento

Un disco è scomponibile in due pezzi  $R, S$  che possono essere ricomposti in modo da formare lo stesso disco privato di un raggio (tenendo però il centro).



Si usa la tecnica dell' "albergo di Hilbert". Scegliamo  $\alpha$  in modo che  $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \dots$  siano tutti distinti. Sia  $R$  l'insieme dei raggi che hanno coordinata angolare pari ad uno degli  $n\alpha$  ( $n$  intero positivo), e dia  $S$  la parte restante del disco. Ora risistemiamo i pezzi  $R, S$  come segue.  $S$  lo lasciamo fermo dove sta.  $R$  lo ruotiamo di un angolo  $\alpha$ . In tal modo il raggio  $n\alpha$  si sposta in posizione  $(n+1)\alpha$  e il raggio di angolo  $\alpha$  sparisce.

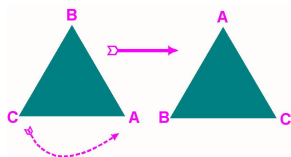


## Gruppi di movimenti nel piano

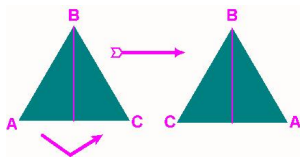


Trovare il gruppo dei movimenti rigidi del piano che preserva la figura.

# Gruppo delle simmetrie del triangolo: $D_3$

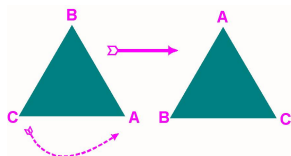


rotazione (a)

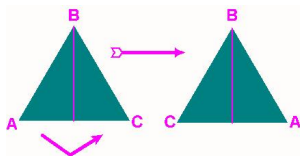


ribaltamento (b)

## Gruppo delle simmetrie del triangolo: D3



rotazione (a)

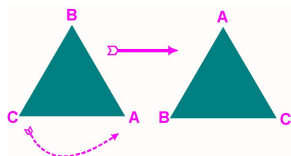


ribaltamento (b)

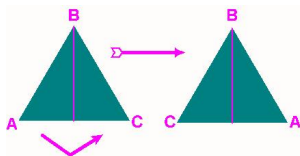
Il gruppo D3 **non è libero**,  
ovvero strade diverse possono  
portare allo stesso risultato:

$$a^3 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^2b.$$

# Gruppo delle simmetrie del triangolo: D3



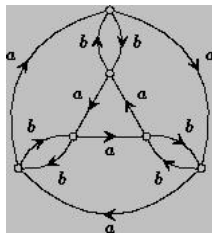
rotazione (a)



ribaltamento (b)

Il gruppo D3 **non è libero**,  
ovvero strade diverse possono  
portare allo stesso risultato:

$$a^3 = 1, \quad b^2 = 1, \quad ba = a^2b.$$

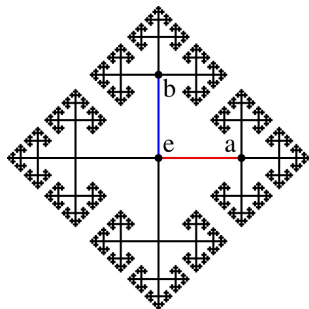


Grafo di Cayley di D3

## Gruppi liberi

In un gruppo libero con due generatori  $a, b$  il grafo di Cayley dovrebbe avere la seguente forma.

Grafo di Cayley del gruppo libero con due generatori  $a, b$ .

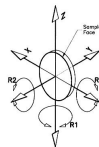


La mossa  $a$  fa andare a destra,  $a^{-1}$  a sinistra,  $b$  in alto,  $b^{-1}$  in basso. Strade diverse a partire dal centro  $e$ , come ad esempio  $b$  e  $aba^{-1}$ , portano a nodi diversi.

Due movimenti rigidi nel piano non possono mai generare un gruppo libero, ma nello spazio ciò è possibile e si rivelerà decisivo per il teorema di Banach-Tarski.

# Rotazioni nello spazio

Ogni movimento rigido di una sfera  $S^2$  in se stessa è una rotazione intorno ad un asse che passa per il centro.



# Orbite

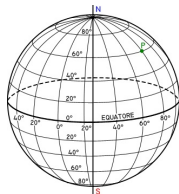
# Orbite

Dato un punto  $P$  nello spazio e un gruppo  $G$  di movimenti, l'orbita di  $P$  consiste dell'insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.



# Orbite

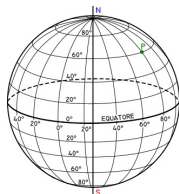
Dato un punto  $P$  nello spazio e un gruppo  $G$  di movimenti, l'orbita di  $P$  consiste dell'insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.



Consideriamo il sottogruppo  $G$  delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

# Orbite

Dato un punto  $P$  nello spazio e un gruppo  $G$  di movimenti, l'orbita di  $P$  consiste dell'insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.

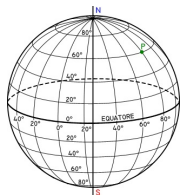


Consideriamo il sottogruppo  $G$  delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

L'**orbita** del punto  $P$  è il parallelo che passa per  $P$ .

# Orbite

Dato un punto  $P$  nello spazio e un gruppo  $G$  di movimenti, l'orbita di  $P$  consiste dell'insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.

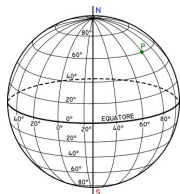


Consideriamo il sottogruppo  $G$  delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

L'**orbita** del punto  $P$  è il parallelo che passa per  $P$ . Ogni meridiano  $M$  contiene uno e un solo punto per ogni orbita, ovvero costituisce un **insieme di rappresentanti** delle orbite.

# Orbite

Dato un punto  $P$  nello spazio e un gruppo  $G$  di movimenti, l'orbita di  $P$  consiste dell'insieme dei punti dove può arrivare  $P$  per effetto di uno degli elementi del gruppo.



Consideriamo il sottogruppo  $G$  delle rotazioni intorno all'asse  $z$ .

L'**orbita** del punto  $P$  è il parallelo che passa per  $P$ . Ogni meridiano  $M$  contiene uno e un solo punto per ogni orbita, ovvero costituisce un **insieme di rappresentanti** delle orbite.

Se scegliamo un sottogruppo  $G$  più complicato, per trovare un insieme  $M$  di rappresentanti per le orbite può essere necessario l'uso dell'assioma della scelta.

## Rotazioni indipendenti

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Due rotazioni indipendenti intorno agli assi z ed x rispettivamente.

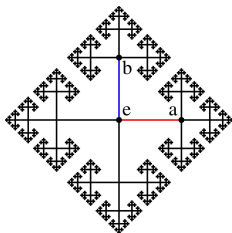
# Rotazioni indipendenti

$$a = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 \\ +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2\sqrt{2}}{3} \\ 0 & +\frac{2\sqrt{2}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

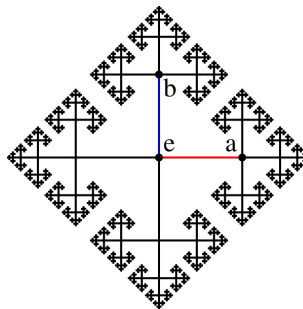
Due rotazioni indipendenti intorno agli assi z ed x rispettivamente.

Il gruppo  $F_{a,b}$  dei movimenti della sfera generato dalle rotazioni a,b è libero.



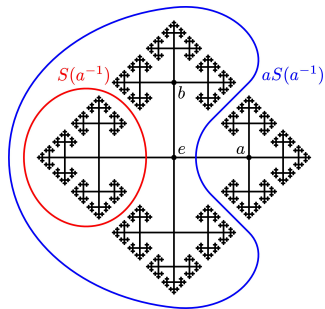
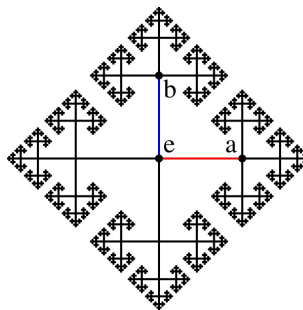
## Scomposizioni paradossali

Il gruppo libero  $F_{a,b}$  generato da  $a, b$  si lascia scrivere come unione disgiunta dei cinque sottoinsiemi  $1, S(a), S(a^{-1}), S(b), S(b^{-1})$  costituiti rispettivamente dal centro e dai quattro “petali” della figura.



# Scomposizioni paradossali

Il gruppo libero  $F_{a,b}$  generato da  $a, b$  si lascia scrivere come unione disgiunta dei cinque sottoinsiemi  $1, S(a), S(a^{-1}), S(b), S(b^{-1})$  costituiti rispettivamente dal centro e dai quattro “petali” della figura.

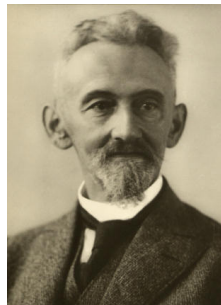


Ma si lascia anche scrivere come unione di  $S(a)$  e  $aS(a^{-1})$ , oppure come unione di  $S(b)$  ed  $bS(b^{-1})$ . Fissato un punto  $P$  sulla sfera non appartenente ad alcuno degli assi di rotazione, otteniamo una scomposizione “paradossale” dell’orbita di  $P$ .



# Teorema di Hausdorff

Fissato un insieme  $M$  di rappresentanti delle orbite, tolto l'insieme numerabile  $D$  dei punti dove la sfera incontra gli assi delle rotazioni di  $F_{a,b}$ , otteniamo una scomposizione paradossale di  $S^2 - D$ .



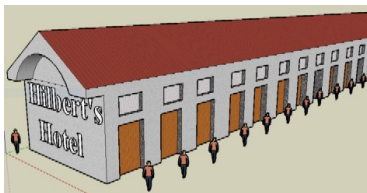
Felix Hausdorff,  
1868-1942

# Teorema di Banach-Tarski

Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto  $S^2$  basta mostrare che  $(S^2 - D) \sim S^2$ .

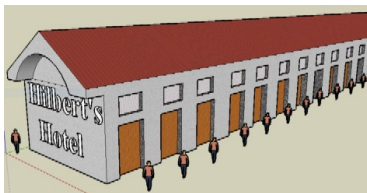
# Teorema di Banach-Tarski

Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto  $S^2$  basta mostrare che  $(S^2 - D) \sim S^2$ . Utilizziamo a tal fine la tecnica dell'albergo di Hilbert per riassorbire  $D$  tramite un'opportuna rotazione  $\rho$  intorno ad un asse passante per il centro della sfera tale che  $D, \rho(D), \rho^2(D), \rho^3(D), \dots$  siano tutti disgiunti.



## Teorema di Banach-Tarski

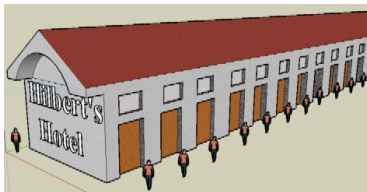
Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto  $S^2$  basta mostrare che  $(S^2 - D) \sim S^2$ . Utilizziamo a tal fine la tecnica dell'albergo di Hilbert per riassorbire  $D$  tramite un'opportuna rotazione  $\rho$  intorno ad un asse passante per il centro della sfera tale che  $D, \rho(D), \rho^2(D), \rho^3(D), \dots$  siano tutti disgiunti.



Dalla paradossalità di  $S^2$  si ottiene facilmente la paradossalità della sfera solida meno il centro.

## Teorema di Banach-Tarski

Per ottenere una decomposizione paradossale di tutto  $S^2$  basta mostrare che  $(S^2 - D) \sim S^2$ . Utilizziamo a tal fine la tecnica dell'albergo di Hilbert per riassorbire  $D$  tramite un'opportuna rotazione  $\rho$  intorno ad un asse passante per il centro della sfera tale che  $D, \rho(D), \rho^2(D), \rho^3(D), \dots$  siano tutti disgiunti.



Dalla paradossalità di  $S^2$  si ottiene facilmente la paradossalità della sfera solida meno il centro. La paradossalità dell'intera sfera solida si ottiene riassorbendo il centro con una rotazione non periodica per un asse non passante per il centro medesimo.