1 Giochi di Erenfeucht-Fraïssé

Sia L la segnatura di un linguaggio del primo ordine.

1 Definizione. (Fraïssé)
Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ due L-strutture con domini A e B rispettivamente, e siano $a_1, \ldots, a_n$ elementi di A e $b_1, \ldots, b_n$ elementi di B. Definiamo per induzione su k la relazione $\sim_k$:

1. $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_0 \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se per ogni formula atomica $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (dove la notazione indica che le variabili libere della formula sono *incluse* in $\{x_1, \ldots, x_n\}$), $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Se $n \neq 0$ ciò equivale a dire che la mappa $a_i \mapsto b_i$ é un isomorfismo tra le sottostrutture generate da questi elementi.

2. $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_{k+1} \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se valgono le seguenti due condizioni, dette condizioni di *va e vieni*,

   - $\forall a \in A \exists b \in B, \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$;
   - $\forall b \in B \exists a \in A, \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$.

Il significato intuitivo di queste definizioni può essere chiarito dando una caratterizzazione della relazione $\sim_k$ in termini di giochi.

2 Definizione. (Giochi di Erhenfeucht) Date due L-strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ ed un numero naturale k (la lunghezza del gioco) consideriamo un gioco $G(\mathcal{A}, \mathcal{B}, k)$, detto gioco di Ehrenfeucht, in cui due giocatori chiamati $\forall$belardo ed $\exists$loisa scelgono a turno elementi delle strutture con i seguenti vincoli. Ad ogni turno $\forall$belardo sceglie una delle due strutture (non necessariamente sempre la stessa nei vari turni di gioco) ed un elemento di quella struttura, mentre $\exists$loisa risponde scegliendo un elemento dell'altra struttura. Dopo m turni sarà stata scelta una successione di m elementi (non necessariamente distinti) $a_1, \ldots, a_m$ di A e una successione di m elementi $b_1, \ldots, b_m$ di B. Scopo di $\exists$eloisa è quello di cercare di "copiare" le mosse del primo giocatore, nel senso che per ogni formula atomica $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, si ha $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$. Se il secondo giocatore riesce a preservare questa condizione copiare per almeno k turni vince, in caso contrario perde.

Il gioco di Ehrenfeucht $G(\langle \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \rangle, \langle \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n \rangle, k)$ è definito come sopra salvo che si parte dalla posizione iniziale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ anziché da $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Una strategia per un giocatore può essere formalmente definita come una funzione che indica la mossa da fare in dipendenza della successione delle precedenti mosse di entrambi giocatori, e una strategia vincente è una strategia che conduce con certezza alla vittoria indipendentemente dalle mosse dell'avversario.

3 Osservazione. Vale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ se e solo se il secondo giocatore ha una strategia vincente per il gioco di Erhenfeucth a k mosse a partire dalla posizione iniziale $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n$ e $\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$.

Proof. Osserviamo che il secondo giocatore ha una strategia vincente per il gioco di lunghezza $k+1$ a partire dalla data posizione iniziale se e solo se, per ogni mossa dell'avversario (ovvero per ogni elemento preso da A o da B), esiste una sua contromossa (ovvero un elemento preso dall'altra struttura) ed una strategia vincente per le rimanenti k mosse a partire dalla nuova posizione (consistente di una lista di $n+1$ elementi da A e $n+1$ elementi da B). La nostra tesi segue ora facilmente per induzione su k applicando le definizioni. □

4 Esercizio. $(\mathbb{R}, \leq) \not\sim_3 (\mathbb{Z}, \leq)$

5 Definizione. Una L-struttura $\mathcal{A}$ si dice **elementarmente equivalente** ad una L-struttura $\mathcal{B}$ (e si indica con $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$) se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ verificano gli stessi L-enunciati. Più in generale, dati $a_1, \ldots, a_n$ nel dominio di $\mathcal{A}$ e $b_1, \ldots, b_n$ nel dominio di $\mathcal{B}$, diciamo che $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \equiv \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$, se e solo se per ogni L-formula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ (con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$), vale $\mathcal{A} \models \phi(a_1, \ldots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \phi(b_1, \ldots, b_n)$.

Questo equivale a dire che se ampliamo il linguaggio L con un insieme C di nuovi simboli di costante $c_1, \ldots, c_n$ abbiamo la elementare equivalenza delle $(L \cup C)$-strutture $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ e $(\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n)$, dove, per $i = 1, \ldots, n$, c_i interpretata come a_i nella prima struttura e come b_i nella seconda.

6 Esempio. 1. $(\mathbb{Q}, \leq) \not\equiv (\mathbb{Z}, \leq)$, in quanto la densità dell'ordine è esprimibile con un enunciato del linguaggio.

2. $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq) \not\equiv (\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, in quanto l'esistenza della radice quadrata di 2 è esprimibile con un enunciato del linguaggio.

3. Si può dimostrare che $(\mathbb{Q}, \leq) \equiv (\mathbb{R}, \leq)$

2 Il teorema di Fraïssé

Il teorema di Fraïssé fornisce una caratterizzazione della equivalenza elementare di due L-strutture in termini di giochi di Erenfeucth-Fraïssé.

7 Definizione. Definiamo il **rango di quantificazione** di una L-formula φ, e lo indichiamo con $RQ(\varphi)$, induttivamente nel modo seguente:

1. Se φ è una formula atomica allora $RQ(\varphi) = 0$
2. $RQ(\varphi \wedge \psi) = \max\{RQ(\varphi), RQ(\psi)\} = RQ(\varphi \vee \psi)$
3. $RQ(\neg\varphi) = RQ(\varphi)$
4. $RQ(\forall x \varphi) = RQ(\exists x \varphi) = 1 + RQ(\varphi)$

8 Definizione. $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \equiv_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$ se e solo se per ogni formula $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ con $RQ(\varphi) \leq p$ si ha: $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$.

Diamo ora un verso del teorema di Fraïssé.

9 Teorema. *Si ha:*

1. *Se $A, a_1, \cdots, a_n \sim_k B, b_1, \cdots, b_n$, allora $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \equiv_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$.*
2. *In particolare se per ogni k vale $\mathcal{A} \sim_k \mathcal{B}$, allora $A \equiv B$.*

Proof. Per la dimostrazione si procede per induzione su k.

Per $k = 0$ basta osservare che un isomorfismo tra le due sottostrutture generate dagli a_i e dai b_i preserva tutte le proprietà esprimibili con formule del linguaggio, e che nel caso le formule siano atomiche non ha importanza se intepretiamo le formule nelle sottostrutture in questione oppure direttamente nelle strutture $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

Sia ora $k > 0$ e supponiamo che $A, a_1, \cdots, a_n \sim_k B, b_1, \cdots, b_n$. Sia $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una formula di rango k. Dobbiamo mostrare che $A \models \varphi(a_1, \cdots, a_n)$ se e solo se $B \models \varphi(b_1, \cdots, b_n)$. A tal fine ragioniamo per induzione secondaria sul numero dei connettivi della formula. Se φ è ottenuta per negazione, disgiunzione o congiunzione da formule più semplici, la verifica è immediata.

Possiamo dunque supporre che φ cominci con un quantificatore. Usando l'equivalenza tra $\forall x P$ e $\neg \exists x \neg P$, possiamo inoltre limitarci a trattare il caso del quantificatore esistenziale. Supponiamo dunque che $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ sia della forma $\exists y \theta(y, x_1, \ldots, x_n)$, e che $\mathcal{A} \models \exists y \theta(y, a_1, \ldots, a_n)$ (analogamente si tratta il caso corrispondente con i ruoli di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ scambiati). Sia $a \in A$ un testimone del quantificatore esistenziale, ovvero un elemento che verifica $\mathcal{A} \models \theta(a, a_1, \ldots, a_n)$. Poiché stiamo supponendo che $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$, in corrispondenza di $a \in A$ deve esistere un $b \in B$ tale che $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n, a \sim_{k-1} \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n, b$. Dunque per l'ipotesi induttiva abbiamo $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n, a \equiv_{k-1} \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n, b$. Visto che θ ha rango $k-1$, e vale $\mathcal{A} \models \theta(a, a_1, \ldots, a_n)$, possiamo concludere $\mathcal{B} \models \theta(b, b_1, \ldots, b_n)$, e quindi $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$,

□

Se il linguaggio è finito e non contiene simboli di funzione, nel Teorema 15 vale la doppia implicazione. Ci serve una definizione.

10 Definizione. Se $\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n \sim_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n$ diciamo che $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$ e $(\mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n)$ appartengono alla stessa classe di $(\sim_k)$-equivalenza di n-uple.

11 Proposizione. *Se L è finito e non contiene simboli di funzione, allora per ogni $k, n \in \mathbb{N}$ vi è un insieme finito $C(k, n)$ di formule di rango $\leq k$ con variabili libere incluse in $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tali che:*

1. *presa comunque una L-strutture A ed una n-upla $a_1, \dots, a_n$ di elementi di A, esiste una ed una sola formula $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in C(k, n)$ tale che $A \models \varphi(a_1, \dots, a_k)$;*

2. *inoltre date comunque delle L-strutture A, B ed elementi $a_1, \dots, a_n$ di A e $b_1, \dots, b_n$ di B, si ha $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n) \sim_k (\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$ se e solo se $(A, a_1, \dots, a_n)$ e $(B, b_1, \dots, b_n)$ verificano la stessa formula di $C(k, n)$.*

In altre parole c'è un numero finito di classi di equivalenza di n-uple modulo $\sim_k$ e ognuna di esse è caratterizzata da una formula di $C(k, n)$.

Proof. Per induzione su k.

Per $k = 0$ osserviamo che due n-uple appartengono alla stessa $(\sim_k)$-classe se e solo se verificano le stesse formule atomiche. Nelle nostre ipotesi sul linguaggio ci sono un numero finito $r \in \mathbb{N}$ di formule atomiche con variabili libere incluse in $\{x_1, \dots, x_n\}$. Questo ci permette di concludere che la $(\sim_0)$-classe di equivalenza di $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$ è caratterizzata dalla congiunzione delle seguenti formule: le formule atomiche $\phi(x_1, \dots, x_n)$ verificate da $a_1, \dots, a_n$ e le negazioni delle formule atomiche non verificate da $a_1, \dots, a_n$.

Supponiamo ora che la tesi valga per un dato k (e per ogni n) e dimostriamola per $k + 1$. Per dimostrare il caso $(k + 1, n)$ useremo il caso $(k, n + 1)$.

Dunque per ipotesi induttiva abbiamo $C(k, n + 1)$ e dobbiamo costruire $C(k + 1, n)$. Dato un sottoinsieme $\delta \subseteq C(k, n + 1)$, definiamo $\psi_\delta(x_1, \cdots, x_n)$ come la formula

$$\bigwedge_{\varphi \in \delta} \exists x_{n+1} \varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1}) \wedge \bigwedge_{\varphi \notin \delta} \neg \exists x_{n+1} \varphi(x_1, \cdots, x_n, x_{n+1})$$

ed osserviamo che φ_δ ha rango $\leq k + 1$. Al variare di δ tra tutti i sottoinsiemi di $C(k + 1, n)$, si ottengono in questo modo $2^{|C(k,n+1)|}$ formule ψ_δ. Alcune di queste formule possono essere inconsistenti e le scartiamo. Le altre descrivono tutte le possibili classi di $(\sim_{k+1})$-equivalenza di n-uple.

Per la verifica procediamo come segue.

Fissato $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$, definiamo $\delta \subseteq C(k, n + 1)$ nel modo seguente. Se $\varphi \in C(n + 1, k)$ ed $\mathcal{A} \models \exists y \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ mettiamo φ in δ. Nel caso contrario $\varphi \notin \delta$. Con questa scelta di δ consideriamo la formula ψ_δ sopra definita. Per costruzione $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) \models \psi_\delta(x_1, \dots, x_n)$ e ovviamente $(\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n) \not\models \psi'_\delta(x_1, \dots, x_n)$ se $\delta' \neq \delta$.

Supponendo $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n) \models \psi_\delta(x_1, \dots, x_n)$, rimane da dimostrare che $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n) \sim_{k+1} (\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n)$. Per definizione di $\sim_{k+1}$ dobbiamo mostrare che per ogni $a' \in A$ esiste $b' \in B$ tale che $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b') \sim_k (\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a')$ ed analogamente per ogni $b' \in B$ esiste $a' \in A$ che verifica la medesima condizione. Facciamo il primo caso, il secondo ottenendosi analogamente scambiando i ruoli di $\mathcal{A}, \mathcal{B}$. Dato $a' \in A$ sia $\varphi \in C(n + 1, k)$ tale che $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n, a')$. In particolare $\mathcal{A} \models \exists y \varphi(a_1, \dots, a_n, y)$ e dunque $\psi \in \delta$. Poiché per ipotesi $\mathcal{B} \models \psi_\delta(b_1, \dots, b_n)$ si ha in particolare $\mathcal{B} \models \exists y \varphi(b_1, \dots, b_n, y)$ e dunque possiamo scegliere $b' \in B$ in modo che $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n, b')$. Per ipotesi induttiva ciò implica $(\mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b') \sim_k (\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a')$ come desiderato. ☐

12 Corollario. *Se il linguaggio è finito e non ha simboli di funzione, nel Teorema 15 vale la doppia implicazione.*

Il seguente esempio mostra la necessità delle ipotesi fatte sul linguaggio.

13 Esempio. Il linguaggio di $(\mathbb{N}, s, 0)$ ha infinite formule di rango 0 non equivalenti. Ad esempio le formule $y = s^n(x)$, dove s^n indica la composizione di s con se stessa n volte, sono non equivalenti tra loro e hanno tutte rango 0.

2.1 Variazioni sul tema

14 Definizione. Consideriamo, invece delle $\sim_k$, delle relazioni $\sim'_k$ $(k \in \mathbb{N})$ con le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim'_0 \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ implica che per ogni formula atomica $\varphi(x_1, \dots, x_n)$, $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$ se e solo se $\mathcal{B} \models \varphi(b_1, \dots, b_n)$ (non richiediamo l'implicazione inversa).

2. $\mathcal{A}, a_1, \dots, a_n \sim'_{k+1} \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n$ implica che:
    - $\forall a \in A \exists b \in B, \mathcal{A}, a_1, \dots, a_n, a \sim'_k \mathcal{B}, b_1, \dots, b_n, b$;

- $\forall b \in B \exists a \in A, \mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n, a \sim'_k \mathcal{B}, b_1, \ldots, b_n, b$.

In altre parole la successione di relazioni $(\sim'_k \colon k \in \mathbb{N})$ si comporta come $(\sim_k \colon k \in \mathbb{N})$ salvo che non richiediamo le implicazioni inverse. Diciamo in questo caso che $(\sim'_k \colon k \in \mathbb{N})$ gode del va e vieni.

15 Teorema. *Supponiamo che $(\sim'_k \colon k \in \mathbb{N})$ goda del va e vieni.*

1. *Se $A, a_1, \cdots, a_n {\sim'}_k B, b_1, \cdots, b_n$, allora $\mathcal{A}, a_1, \cdots, a_n \equiv_k \mathcal{B}, b_1, \cdots, b_n$.*
2. *In particolare se per ogni k vale $\mathcal{A} \sim'_k \mathcal{B}$, allora $A \equiv B$.*

Proof. La dimostrazione è identica a quella data per $\sim_k$. $\square$