Compitino di MD
5 novembre 2014

Cognome e nome: ....

Numero di matricola: .... Corso e Aula: ....

<u>IMPORTANTE:</u> Non si possono consultare libri e appunti. Non si possono usare calcolatrici, computer o altri dispositivi elettronici. Non si può scrivere con il lapis. Motivare in modo chiaro le risposte. I testi degli esercizi sono su fogli separati su cui vanno scritte le rispettive soluzioni: **scrivere il nome su ciascun foglio**. Mettere entro un riquadro bene evidenziato la soluzione, e nel resto del foglio lo svolgimento.

Esercizio 1.
Trovare il più piccolo valore $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, valga

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq \frac{1}{2} n^4.$$

Cominciamo ad esaminare la disuguaglianza per valori piccoli di n.

$\underline{n=0}$ $\quad 0 \leq 0$ vero

$\underline{n=1}$ $\quad 1 \leq \frac{1}{2}$ falso $\qquad \underline{n=2}$ $\quad 1+2^3 \leq \frac{1}{2} 2^4$ FALSO

$\underline{n=3}$ $\quad 1+2^3+3^3 \leq \frac{1}{2} 81$ VERO

Mostriamo ora per induzione che la disug vale $\forall n \geq 3$

Abbiamo già verificato il caso $n=3$.

Mostriamo ora che se $n \geq 3$ e vale $\sum_{i=0}^{n} i^3 \leq \frac{1}{2} n^4$ allora vale anche $\sum_{i=0}^{n+1} i^3 \leq \frac{1}{2} (n+1)^4$

$$\sum_{i=0}^{n+1} i^3 = \sum_{i=0}^{n} i^3 + (n+1)^3 \overset{\text{IP IND}}{\leq} \frac{1}{2} n^4 + (n+1)^3 \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}(n+1)^4 \quad (*)$$

L'ultima disug vale $\iff \frac{1}{2}(n+1)^4 - \frac{1}{2} n^4 - (n+1)^3 \geq 0$

$\iff \frac{1}{2} n^4 + \frac{1}{2} 4n^3 + \frac{1}{2} 6n^2 + \frac{1}{2} 4n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} n^4 - n^3 - 3n^2 - 3n - 1 \geq 0$

$\iff n^3 \geq n + \frac{1}{2}$. Per $n \geq 3$ si ha $n^3 \geq 3^2 n \geq n + \frac{1}{2}$

quindi la disug $(*)$ è sempre verificata $\forall n \geq 3$

Es 2

a) Quanti sono i sottoinsiemi di 3 elementi di $\mathbb{N}_{100}$ tali che la somma degli elementi sia pari?

Soluzione:

$\{PARI, DISPARI, DISPARI\}$ oppure $\{PARI, PARI, PARI\}$

$$50 \cdot \binom{50}{2} + \binom{50}{3}$$

b) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono almeno 3 numeri pari?

Soluzione:

$$2^{50}\left(2^{50} - \binom{50}{0} - \binom{50}{1} - \binom{50}{2}\right).$$

2^{50} modi di scegliere i dispari

$2^{50} - \binom{50}{0} - \binom{50}{1} - \binom{50}{2}$ modi di scegliere i pari

d) Quante sono le terne ordinate (n, m, u) di elementi di $\mathbb{N}_{100}$ il cui prodotto fa 100?

Sol: $100 = 2^2 \cdot 5^2$.

$$\begin{cases} n = 2^{a_1} \cdot 5^{b_1} \\ m = 2^{a_2} \cdot 5^{b_2} \\ u = 2^{a_3} \cdot 5^{b_3} \end{cases}$$

$a_1 + a_2 + a_3 = 2$ (6 soluzioni).

$b_1 + b_2 + b_3 = 2$ (6 soluzioni). $\Rightarrow$ $6 \cdot 6 = 36$ possibili terne.

c) Quanti sono i sottoinsiemi di $\mathbb{N}_{100}$ che contengono esattamente 3 numeri pari ed esattamente un multiplo di 5?

Soluzione: occorre distinguere due casi a seconda che il multiplo di 5 sia pari o dispari.

C = multipli dispari di 5. $\#C = 10$

D = multipli pari di 5. $\#D = 10$

Gli altri 80 numeri si suddividono in:

$A = \{x \mid 2 \nmid x \wedge 5 \nmid x\}$ = dispari non multipli di 5. $\#A = 40$.

$B = \{x \mid 2 \mid x \wedge 5 \nmid x\}$ = pari e non multipli di 5. $\#B = 40$

Il sottoinsieme può contenere:

Caso 1: 1 elemento di C (10 scelte), tre elementi di B ($\binom{40}{3}$ scelte), e altri elementi da A (2^{40} scelte).

Caso 2: 1 elemento di D (10 scelte), 2 elementi di B ($\binom{40}{2}$ scelte), e altri elementi da A (2^{40} scelte).

La soluzione è dunque: $\boxed{10 \cdot \binom{40}{3} \cdot 2^{40} + 10 \cdot \binom{40}{2} \cdot 2^{40}}$.

Esercizio 3. Consideriamo i due seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Data l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita da $L(x, y, z) = (x + y, x + z, x + z)$ trovare una base di Ker L e Im L e scrivere la matrice $[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$ associata alla base $\mathcal{C}$ in partenza e alla base $\mathcal{B}$ in arrivo.

La matrice associata all'applicazione lineare L rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo è

$$A = [L]_{\{e_1 e_2, e_3\}}^{\{e_1 e_2, e_3\}} = \left([Le_1]\, [Le_2],\ [Le_3] \right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Riduciamo a gradini con Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ base di Im $L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

la base di Ker L si trova risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -y \\ y = z \\ z = z \end{cases} \quad \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z = z \end{cases}$$ base Ker $L = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathbb{R}^3_{\mathcal{C}} \xrightarrow[id]{C} \mathbb{R}^3_{\{e_i\}} \xrightarrow[L]{A} \mathbb{R}^3_{\{e_i\}} \xrightarrow[id]{B} \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}}$$

$$[L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = BAC \quad \text{con} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcoliamo B

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } [L]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5/3 & 1 & 0 \\ 10/3 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$