Elementi di Teoria degli Insiemi

Alessandro Berarducci

Scritto del 11 Gennaio 2017

Esercizio 1. Stimare la cardinalità dell'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ debolmente crescenti, ovvero tali che per ogni $x \leq y$ in $\mathbb{R}$ si abbia $f(x) \leq f(y)$.

Esercizio 2. Consideriamo l'insieme X delle successioni binarie $f : \omega \to \{0, 1\}$ e la relazione di equivalenza $E \subseteq X \times X$ definita ponendo fEg se e solo se $f(n) = g(n)$ per tutti gli n tranne un numero finito. Quale è la cardinalità dell'insieme quoziente X/E?

Esercizio 3. Si calcoli il rango α dell'insieme X/E dell'esercizio precedente, ovvero il minimo ordinale α tale che $X/E \in V_{\alpha+1}$, o si cerchi di dare una buona stima superiore per α.

Esercizio 4. Sia $f : ON \to ON$ la funzione $f(x) = \omega^x x$.

a) Stabilire se esiste $x \in ON$ diverso da zero tale che $f(x) = x$.

b) Stabilire se f è continua, ovvero se per ogni famiglia $(\alpha_i)_{i \in I}$ di ordinali, si abbia $f(\sup_{i \in I} \alpha_i) = \sup_{i \in I} f(\alpha_i)$.

b) Stabilire se esiste un ordinale infinito $\alpha < \omega_1$ tale che per ogni $x < \alpha$ si abbia $f(x) < \alpha$.