Elementi di Teoria degli insiemi
3 Appello
Prova scritta del 5 Settembre 2016, Soluzioni

Esercizio 1. Trovare degli ordinali α, β che verifichino le seguenti uguaglianze o dimostrare che non esistono (l'esponenziazione va intesa in senso ordinale, non cardinale):

1. $\omega^\omega = 2^\alpha$;
2. $(\omega+1)^{(\omega+1)} = 2^\beta$.

Soluzione. $\alpha = \omega^2$, β non esiste.

Esercizio 2. Dato un insieme infinito A, è sempre possibile partizione A in $\aleph_0$ insiemi di cardinalità $|A|$?
Soluzione. Poichè A è infinito, A ha la stessa cardinalità di $A \times \mathbb{N}$, ovvero esiste una bigezione $f : A \to A \times \mathbb{N}$. Partizioniamo A negli insiemi $X_n = f^{-1}(A \times \{n\})$.

Esercizio 3. Confrontare le cardinalità dei seguenti insiemi mettendoli in ordine crescente e stabilendo le eventuali uguaglianze:

1. l'insieme delle funzioni $f : \omega_1 \to \omega_2$;
2. l'insieme delle funzioni $f : \omega_1 \to \omega_1$;
3. l'insieme delle relazioni di equivalenza su ω_1.

Soluzione. Hanno tutti e tre cardinalità $2^{\aleph_1}$.

Esercizio 4. Dato un insieme infinito X totalmente ordinato esiste sempre una successione infinita strettamente crescente o strettamente decrescente di elementi di X?
Soluzione. Si. Se non vi sono successioni infinite decrescenti X è un buon ordine. Essendo infinito è isomorfo ad un ordinale $\geq \omega$, quindi contiene una successione crescente infinita.

Esercizio 5. Dato un insieme infinito X parzialmente ordinato esiste sempre una successione infinita di elementi di X strettamente crescente, o strettamente decrescente, oppure composta di elementi a due a due inconfrontabili?
Soluzione. Si. Supponiamo per assurdo che non vi siano successioni infinite crescenti, decrescenti, o composte di elementi a due a due inconfrontabili (anticatene). Definiamo il rango di $a \in X$ come il massimo $k \in \mathbb{N}$ tale che esistono elementi $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ con $a_k = a$. Osserviamo che ogni elemento ha un rango finito grazie all'esercizio precedente e che vi sono un numero finito di elementi minimali o massimali altrimenti avrei una anticatena infinita. Gli elementi di rango zero sono

gli elementi minimali di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vi sono un numero finito di elementi di rango n in quanto elementi dello stesso rango devono essere inconfrontabili. Sia $N \in \mathbb{N}$ il massimo dei ranghi degli elementi massimali. Vi sono un numero finito di possibili ranghi in quanto il rango di ogni elemento è $\leq N$. Siccome per ogni rango vi sono un numero finito di elementi, ne segue che X è finito. Assurdo.