<u>Oss</u>: R^* e' la minima relaz tale che $xR^*y \iff xRy \vee \exists z(xRz \wedge zR^*y)$

<u>Teo</u>: (Ricorsione su Ordinali)

Sia H una funzione classe $H: ON \times V \to V$ esiste (trovo) $F: ON \to V$ t.c.

$F(\alpha) = H(\alpha, F_{|\{x | x<\alpha\}}) = H(\alpha, F_{|\alpha}) = H(F_{|\alpha})$

↳ α si può comunque ricavare.

↳ Dico che f e' una γ-approssimazione se $f(\alpha) = H(\alpha, f_{|\alpha})$ $\forall \alpha < \gamma$.

Quindi $f: \gamma \to V$ e' un insieme.

Mostriamo per induz. su γ che $\exists! f$ γ-appross.

Se $\gamma = 0 \Rightarrow f = \phi$.

Se γ vale: per induz ho che $\forall \beta<\gamma$ $\underbrace{\exists!}_{\text{non serve A.C.}}$ f_β β-approssimazione.

Allora $f_\gamma(\alpha) := \begin{cases} f_\beta & \text{se } \alpha < \beta \\ H(\beta, (f_\gamma)_{|\beta}) = H(\beta, f_\beta) & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$

Se γ e' succ funziona.

Se γ e' limite: $f_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} f_\beta$

γ e' un insieme $\Rightarrow \beta \in \gamma \mapsto f_\beta$ e' funz. classe $\Rightarrow \{f_\beta | \beta<\gamma\}$ e' insieme per rimpiazz.

L'unicita' delle γ-appr. e' facile perché le restrizioni a $\beta<\gamma$ devono coincidere.

Quindi $f_\gamma = \bigcup_{\beta<\gamma} \{f_\beta | \beta<\gamma\}$ e' una funzione.

Mostriamo che f_γ e' γ-appross.

$Dom(f_\gamma) = \bigcup_{\beta<\gamma} Dom(f_\beta) = \bigcup_{\beta<\gamma} \beta = \gamma$ perché γ limite.

Inoltre per costruzione f_γ verifica la condizione:

$f_\gamma(\beta) = f_{\beta+1}(\beta) = H(\beta, f_{\beta+1}|_\beta) = H(\beta, f_\beta) = H(\beta, f_{\gamma|\beta})$.

Quindi ora $\underbrace{F(x)=y}_{F(x,y) \text{ formula}} \iff \exists\beta(\beta \in ON \wedge f_\beta(x) = y \wedge x \in Dom(f_\beta))$ ⊠

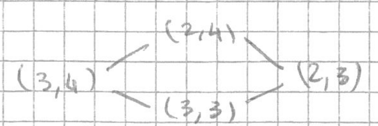
<u>Oss</u>: Quando abbiamo definito le operazioni su ON stavamo facendo delle α-approssimaz.

Cioe' $\alpha + \beta = \gamma$ sse $\exists f: \beta+1 \to V$ t.c. $f(0) = \alpha$, $f(S(x)) = S(f(x))$, $f(\lambda) = \bigcup_{\beta<\lambda} f(\beta)$.

<u>Prop</u>: $R \subset X \times X$ ben fondata $\iff \forall Y \subseteq X, Y \neq \phi, \exists y \in Y$ minimale.
(nel senso di succ. crescenti)

<u>Esempio</u>: $R \subset (\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \times (\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, $\langle a,b\rangle R \langle c,d\rangle \iff (a<c \wedge b \leq d) \vee (a \leq c \wedge b < d)$

$(3,4) R (2,4)$, $(5,6) R (5,7)$



R non e' totale ma e' ben fondato. Infatti la funzione che associa $\langle a,b\rangle \mapsto a+b \in \mathbb{N}$ decresce.

<u>Teo</u>: (Ricorsione su Relaz. ben fondate)

Se $R \subseteq X \times X$ ben fondata e X insieme, allora se $H: X \times V \to V$ trovo

$F: X \to V$ t.c. $F(a) = H(a, F_{|\{b | bRa\}})$

↳ Si può fare con le a-approssimazioni e dettagli aggiuntivi. ⊠ ~~fare~~: (vedi dispense)

<u>Esercizio</u>: $\alpha, \beta \in ON \Rightarrow \alpha+\beta \simeq \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$ con l'ordinamento $\leq_{rlex}$.

↳ <u>OSS</u>: $(ON \times ON, \leq_{lex})$ non e' una rel. ben fond. (local. piccola) ⇓ ZF non può essere usato per fare induz su $(ON \times ON, \leq_{lex})$

↳ Prendiamo $f: \alpha+\beta \to \alpha \times \{0\} \cup \beta \times \{1\}$.

Se $x < \alpha+\beta$ ho due casi:

- $x < \alpha \Rightarrow f(x) = \langle x, 0\rangle$
- $x > \alpha \Rightarrow f(x) = \langle \gamma, 1\rangle$ t.c. $\alpha + \gamma = x$

E' bigettiva e crescente. (<u>esercizio</u>)

<u>Esercizio</u>: $\alpha, \beta \in ON \Rightarrow \alpha \cdot \beta \simeq \alpha \times \beta$ con $\leq_{rlex}$

↳ $f: \alpha\cdot\beta \to \alpha \times \beta$. $x < \alpha \cdot \beta \Rightarrow$ scrivo x diviso α, $x = \alpha \cdot \underset{\in ON}{q} + \underset{\in ON}{r}$ e $f(x) = (r, q)$.

Osserviamo che $r < \alpha$ e $q < \beta$ per costruzione.

E' bigettiva e crescente. (<u>esercizio</u>)

<u>Esercizio</u>: $\alpha, \beta \in ON \Rightarrow \alpha^\beta \simeq \{f | f: \beta \to \alpha \wedge supp(f) \text{ finito}\}$ con $\leq_{rlex}$, cioe' $f < g$ sse $f(b) < g(b)$ con $b = \max\{x | f(x) \neq g(x)\}$.

<u>Esempio</u>: (Funzione rango)

$R \subseteq A \times A$ ben fondata. Sia $\rho: A \to ON$, $\rho(a) = \bigcup\{\rho(b)+1 | bRa\}$ $= \sup\{\rho(b)+1 | bRa\}$

Per esempio $A = \mathbb{N}$, $xRy \iff x|y \wedge x \neq y$. E' chiaramente ben fondata.

$\rho(72) = \bigcup\{\rho(b)+1 | b \in B\}$ con $B = \{1,2,3,4,6,9,18,12,24,36\}$

$\rho(1) = 0$; $\rho(2) = \bigcup\{\rho(1)+1\} = 1$; $\rho(3) = \bigcup\{\cancel{\rho(2)+1}, \rho(1)+1\} = \bigcup\{\cancel{2}, 1\} = 1$.

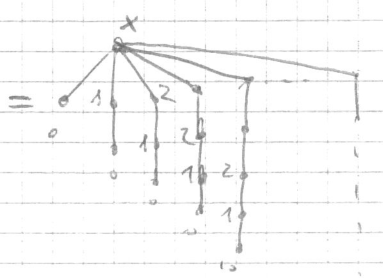
$\rho(4) = \bigcup\{\rho(1)+1, \rho(2)+1\} = \bigcup\{1,2\} = 2$

$\rho(12) = \bigcup\{3,2,1\} = 3$

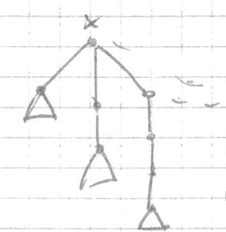
$\vdots$

$\rho(72) = 5$.

Se la relazione e' fatta come:

$\Delta =$ 

E' ben fondata e $\rho(x) = \bigcup\{1,2,3,\dots\} = \omega$.

Se faccio 

$\rho(x) = \omega + \omega$.

Prop: La funzione rango $\rho: A \to ON$ è ben def.

↳ Dobbiamo mostrare che $\rho(a) \in ON$ $\forall b R a$. Procediamo per induz. ben fondata.

Posso supporre che $\forall b R a$ $b \in ON \Rightarrow \rho(a) = \bigcup\{\rho(b)+1 \mid bRa\} = \sup\{\rho(b)+1 \mid bRa\} \in ON$. ☒

Cor: Ogni buon ordine $(A, <_A)$ è isomorfo a un ordinale α.

↳ Considero $\rho: A \to ON$ e $\alpha = \mathrm{Im}(\rho)$. Vale $(\alpha, \in) \simeq (A, <_A)$. Noi seguiamo un'altra dimostr.

Definiamo la funz. $f(a) := \{f(b) \mid b <_A a\}$. È ben posta per ricursione su $<_A$.

Quindi se $b < a \Rightarrow f(b) \in f(a)$.

Sia $\alpha = \mathrm{Im}(f)$. Dico che $\alpha \in ON$. Per prima cosa mostriamo per induz. che $f(a) \in ON$.

Se $\forall b < a$, $f(b) \in ON$ e cioè $f(a) \subseteq ON$, siccome $f(a)$ è transitivo (verificare) $\Rightarrow$ $f(a) \in ON$.

Vediamo che $\alpha = \mathrm{Im}(f)$ è transitivo (come prima). Siccome $\mathrm{Im}(f) \subset ON \Rightarrow \alpha \in ON$.

$f: A \to \alpha$ è surgettiva. E se $x \underset{A}{<} y \Rightarrow f x \in f y \Rightarrow$ iniettiva.

È facile vedere che f crescente. ☒

Oss: È importante sapere che nel teo. ricursione è necessario l'assioma rimpiazzamento.

Oss: La funzione utilizzata nella dim. è in realtà la funzione rango. Infatti

$\alpha \in ON \Rightarrow \alpha = \sup\{\rho(b)+1 \mid b \in \alpha\}$

↳ Se $\alpha = b+1$ ovvio.

Se $\alpha = \sup_{\beta \in \lambda}$ allora $\beta \in \alpha \Rightarrow \beta + 1 \in \alpha$. Inoltre $\alpha \geq \sup\{b+1 \mid b \in \alpha\}$ ovvio.

Invece $b \in \alpha \Rightarrow b+1 \in \alpha \Rightarrow b+1 \leq \sup\{b+1 \mid b \in \alpha\}$ ma $b \in b+1 \leq \sup\{\dots\}$

e $b \in \sup\{\dots\}$.

$$f(a) = \underbrace{\{f(b) \mid b \in a\}}_{ON} = \sup\{f(b)+1 \mid b \in a\} \overset{\text{è la stessa formula del rango}}{=} \sup\{\rho(b)+1 \mid b \in a\} = \rho(a).$$

Formalmente: per induzione $f(a) = \rho(a)$ $\forall a$. ☒

Esempio: $(\mathbb{N} \times \{0\} \cup \mathbb{N} \times \{1\}, \leq_{rlex})$. $\rho(0,1) = \sup\{\rho(n,0)+1 \mid n \in \omega\} = \sup_n\{n+1\} = \omega$.

Inoltre $\mathrm{Im}(\rho) = \sup\{\rho(n,1)+1 \mid n \in \omega\} = \omega + \omega$ e qui uso il rimpiazzamento:

$$\underset{\text{insieme}}{\{n \mid n \in \omega\}} \xrightarrow[\text{RIMP}]{} \underset{\text{insieme}}{\{\rho(n) \mid n \in \omega\}} \xrightarrow[\text{RIMP}]{} \underset{\text{insieme}}{\{\rho(n)+1 \mid n \in \omega\}} \xrightarrow[\text{RIMP}]{} \underset{\text{insieme}}{\sup\{\dots\}}$$

Cor: Ogni buon ordine $(A, <_A)$ è isomorfo a un unico ordinale $\alpha =: ot(A, <_A)$

Cor: Dati $(A, <_A)$ e $(B, <_B)$ buoni ordini $\Rightarrow$ uno è isomorfo a un segmento iniziale dell'altro.

↳ Esercizio: dimostrare senza l'uso di ordinali.

19 - 18/04/16

Teo: (Hartogs)

Esiste un ordinale non numerabile

↳ L'ordinale è definito così:

Sia A insieme e $H(A) := \{\alpha \in ON \mid |\alpha| \leq |A|\}$. **Teo**: $H(A)$ è insieme.

Quindi $H(\mathbb{N}) \in ON$ e non è numerabile. Infatti è transitivo, quindi è ordinale.

In generale $H(A) \in ON$ e $|H(A)| > |A|$. (In realtà possiamo dire $\nleq$) perché $H(\mathbb{N}) \nleq H(\mathbb{N})$

Se $\alpha \in ON$ e $|\alpha| \leq \aleph_0 \Rightarrow \alpha \in H(\mathbb{N}) \Rightarrow \alpha < H(\mathbb{N}) \Rightarrow \alpha \neq H(\mathbb{N}) \Rightarrow H(\mathbb{N}) > \aleph_0$.

Abbiamo lasciato in sospeso:

Prop: Sia A un insieme, allora $H(A)$ è un insieme.

↳ Idea: se $\alpha \in H(A) \Rightarrow \alpha \cong (B, <_A)$ con $B \subset A$.

Basta dimostrare che $H(A) = \{ot(B, <_B) \mid B \subset A \wedge (<_B \text{ buon ordine su } B)\}$

Infatti dato α $\exists f: \alpha \to A$ iniettiva e prendo $B = \mathrm{Im}(f) \Rightarrow \alpha \cong B$. Ordino B come:

$b_1 < b_2 \iff x \in y$ dove $f(x) = b_1$ e $f(y) = b_2$.

Cioè $\alpha = ot(B, <_B)$.

Adesso basta osservare che $\{(B, <_B) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A \times A) \mid (B, <_B) \text{ buon ordine}\}$ è un insieme. Quindi per rimpiazzamento con la funzione ot anche $H(A)$ è un insieme. ☒

Denotiamo $\omega_1 := H(\omega)$. Quindi $\omega_1 > \omega$.

Oss: Se $\alpha > \omega$ e $\alpha < \omega_1$ allora $\alpha = ot(\mathbb{N}, <^*)$ per qualche ordine. Se consideriamo gli ordini calcolabili tramite algoritmi, essi sono una quantità numerabile.

Questo significa che esistono ordinali numerabili <u>non</u> calcolabili. Inoltre esiste il minimo ordinale numerabile non calcolabile detto $\underline{\omega_1^{CK}}$.

Cor: Per ogni ordinale α esiste un numero ordinale $\alpha^+ = H(\alpha)$ tale che $|\alpha^+| > |\alpha|$.

Funzione Aleph

$\aleph: ON \to ON$

$$\begin{cases} \aleph_0 = \omega \\ \aleph_{\alpha+1} = H(\alpha) \\ \aleph_\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta \quad \lambda \text{ limite} \end{cases}$$

Sono tutti e soli i cardinali infiniti (vedi defin. pag. seg.)

Abbiamo la catena strett. crescente: $\underset{\omega}{\aleph_0} < \underset{\omega_1}{\aleph_1} < \underset{\omega_2}{\aleph_2} < \dots < \underset{\omega_\omega}{\aleph_\omega} < \underset{\omega_{\omega+1}}{\aleph_{\omega+1}} < \dots$

Presi due di questi adiacenti, fra di loro ci sono molti ordinali ma questi sono tutti della stessa cardinalità.

Oss: Ogni ordinale β infinito è in bigezione con uno e un solo $\aleph_\alpha$

Problema: $\exists \alpha \in ON$ tc $|\mathbb{R}| = |\aleph_\alpha|$?

Ipotesi del Continuo (CH): $|\mathbb{R}| = |\aleph_1|$ è indecidibile in ZF. (Goedel 1941 ($ZF \nvdash \neg CH$) - Cohen 1963 ($ZF \nvdash CH$))

Teorema: $|\mathbb{R}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \neq |\aleph_\omega|$

Oss: Non possiamo dire se sia $>$ oppure $<$.

Def: Un cardinale è un ordinale iniziale, cioè è il minimo della sua cardinalità.

Problema: Dato A insieme $\exists \alpha \in ON$ tc $|\aleph_\alpha| = |A|$?

Teo: α è cardinale $\Leftrightarrow$ $\alpha = \aleph_\beta$ con $\beta \in ON$ oppure $\alpha \in \omega$.

Teorema: (Zermelo)

Ogni insieme A può essere bene ordinato.

↳ Sia $\alpha = H(A) \in ON$, $|\alpha| \nleq |A|$. Sia $b \notin A$ (esiste, altrimenti $A = V$).

Definiamo $f: \alpha \to A \cup \{b\}$ come segue:

Con AC fissiamo una funzione h tc se $\emptyset \neq B \subseteq A \Rightarrow h(B) \in B$.

Quindi $h: \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A$.

Definisco f per ricorsione:

$f(0) = h(A) \in A$

$f(1) = h(A \setminus \{f(0)\})$

$\vdots$

In generale:

$$f(\beta) = \begin{cases} h(\overbrace{A \setminus \{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\}}^{A_\beta}) & \text{se } A_\beta \neq \emptyset \\ b & \text{se } A_\beta = \emptyset \end{cases}$$

Questa è una buona definizione.

La funzione f non può essere iniettiva, altrimenti $|\alpha| \leq |A|$ ma $\alpha = H(A)$.

Quindi $\exists$ un minimo ordinale β tc $f(\beta) = f(\gamma)$ per qualche $\gamma < \beta < \alpha$.

Ma allora $f(\beta) = f(\gamma) = b$ cioè $A = \{f(\gamma) \mid \gamma < \beta\} \underset{(*)}{=} \mathrm{Im}(f|_\beta)$

Ma $f|_\beta: \beta \to A$ è iniettiva.

Ma è surgettiva per (*).

Quindi A è bene ordinabile. ☐

Riepilogo assiomi usati: tra AC, Parti, Rimpiazzamento

Hartogs: Parti, Rimpiazzamento

Zermelo: Parti, Rimpiazzamento, AC

Cor: $\forall A, B$ $|A| \leq |B| \vee |A| \geq |B|$

↳ gli ordinali sono confrontabili. ☐

Oss: L'ordinale β costruito in Zermelo non è necessariamente iniziale, ma è in corrisp. biunivoca con un unico iniziale.

Quindi:

$\forall A$ insieme $\exists! \aleph_\alpha$ tc $|A| = \aleph_\alpha$.

20-19/04/16

Teo: $\forall \beta \in ON \Rightarrow \aleph_\beta$ è iniziale.

↳ Se $\beta = \alpha + 1$, $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha)$ ma $\forall A$ $H(A)$ è iniziale. (vedi Lemma succ.)

Se $\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \beta$, $\aleph_\lambda = \sup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta = \bigcup_{\beta < \lambda} \aleph_\beta$.

Basta mostrare che l'unione di iniziali è iniziale (per induz.).

Se $\gamma < \aleph_\lambda \Rightarrow \gamma \in \aleph_\lambda \Rightarrow \gamma \in \bigcup_{\beta<\lambda} \aleph_\beta \Rightarrow \exists \beta$ tc $\gamma < \aleph_\beta$ ma $\aleph_\beta$ è iniziale $\Rightarrow |\gamma| < \aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$

Quindi $|\gamma| < \aleph_\lambda$ e allora $\aleph_\lambda$ è iniziale. ☐

Consideriamo $\alpha \in ON$ e consideriamo le due operazioni:

1) $\beta = H(\alpha) = \{\gamma \in ON \mid |\gamma| \leq \alpha\}$

2) $\beta = |\mathcal{P}(\alpha)|$

Vediamo se generano ordinali più grandi.

Lemma: X insieme $\Rightarrow$ $H(X)$ è ordinale iniziale

↳ È sicuramente ordinale. Se $\beta < H(X) \Rightarrow \beta \in H(X) \Rightarrow |\beta| \leq |X|$ ma $|H(X)| \nleq |X|$.

Quindi $|H(X)| > |X|$. ☐

Oss: In generale $|\beta| = |H(\alpha)| > |\alpha|$. ~~Vale~~ $|\alpha| = \alpha$ solo se α iniziale.

Oss: Possiamo ridefinire le operazioni sugli ordinali. Ad esempio:

$\alpha^\beta = |\{f: \beta \to \alpha\}|$ ← grazie al Teo. Zermelo.

In questo modo però bisogna fare attenzione alle notazioni perché le operazioni fra cardinali e ordinali sono diverse.

Esempio: $\omega + \omega = \omega$ come cardinali

$\omega + \omega > \omega$ come ordinali

Per uscire da questa ambiguità si usano gli "aleph" per i cardinali:

$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$; $\omega + \omega > \omega$.

$\aleph_0^{\aleph_0} = |\{f: \aleph_0 \to \aleph_0\}| > \omega^\omega$, quest'ultimo è numerabile.

Lemma: $\aleph_{\alpha+1}$ è il minimo ordinale tc $\aleph_\beta > \aleph_\alpha$.

↳ $\beta < \aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) \Rightarrow |\beta| \leq |\aleph_\alpha| = \aleph_\alpha$. ☐

Oss: Non esistono ordinali $\aleph_\beta$ fra $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$ e gli $\aleph_\alpha$.

__Teo__: $\kappa \in ON$ iniziale infinito $\Rightarrow \exists \alpha \ \kappa = \aleph_\alpha$.

↳ Per induzione su α mostriamo che $\aleph_\alpha \geq \alpha$:

- $\aleph_0 = \omega \geq 0$
- $\aleph_{\alpha+1} = H(\aleph_\alpha) > \aleph_\alpha$ (visto) — __Teo__: X infinito $\Rightarrow |X|+1 = |X|$.

  $\aleph_{\alpha+1} > \aleph_\alpha \geq \alpha \Rightarrow \alpha < \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow \alpha+1 < \aleph_{\alpha+1}$.
- $\aleph_\lambda = \sup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha \underset{\text{ind}}{\geq} \sup_{\alpha<\lambda} \alpha = \lambda$
- $\exists \alpha \ \aleph_\alpha = \alpha$: $\alpha_0 = \omega$, $\alpha_{n+1} = \aleph_{\alpha_n} \Rightarrow \alpha := \sup_n \alpha_{n+1} = \sup_{n\in\omega} \aleph_{\alpha_n} = \sup_{\beta<\alpha} \aleph_\beta = \aleph_\alpha$.

Ora $\aleph_\kappa \geq \kappa$, $\aleph_{\kappa+1} > \kappa$. $\exists \alpha \ \aleph_{\alpha+1} > \kappa$.

Considero il minimo ordinale β t.c. $\aleph_{\beta+1} > \kappa$.

Dico che $\aleph_\beta = \kappa$.

Sicuramente $\aleph_\beta < \aleph_{\beta+1}$ con nulla in mezzo. $\kappa \leq \aleph_\beta$.

Se per assurdo $\kappa < \aleph_\beta$ ho due casi:

- $\beta = \gamma+1 \Rightarrow \kappa < \aleph_{\gamma+1}$ contro minimalità di β. $\perp$
- β limite $\Rightarrow \aleph_\beta = \sup_{\alpha<\beta} \aleph_\alpha > \kappa \Rightarrow \exists \alpha \in \beta \ \aleph_\alpha < \kappa$, $\aleph_{\alpha+1} > \kappa$ ma $\alpha < \beta$ $\perp$. ☐

__Teo__: X infinito $\Rightarrow |X| \geq \aleph_0$, cioè esiste $f: \mathbb{N} \to X$ iniettiva.

↳ Prendiamo $h: \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\} \to X$ funzione scelta.

$f(0) := h(X)$, $f(n) := h(X \setminus \{f(i) \mid i<n\})$ se non vuoto. Altrimenti $f(n) := b \notin X$.

Quindi $f: \mathbb{N} \to X \cup \{b\}$.

Sia n il minimo per cui $f(n) = b$ cioè $X \setminus \{f(i) \mid i<n\} = \emptyset$ cioè $X = \{f(i) \mid i<n\}$.

Allora X finito. $\perp$. Quindi $f: \mathbb{N} \to X$.

f è iniettiva perché se $i \neq j$ e $j<i$ allora $f(i) = h(X \setminus \{f(j) \mid j<i\}) \notin \{f(j) \mid j<i\}$ ☐

__Cor__: $\aleph_\alpha$ è sempre ordinale limite, se α infinito.

↳ Infatti $|\aleph_\beta|+1 = |\aleph_\beta| < \aleph_\alpha$ perché α iniziale (se $\beta<\alpha$).

__Teo__: X infinito $\Rightarrow |X| = |X|+1$

↳ Sia $N = \text{Imm}(f)$ con f come nel teorema. $X = N \dot\cup Y \Rightarrow |X|+1 = |N|+|Y|+1 \overset{\text{alb. Hilbert}}{=} |N|+|Y| =$

$= |N \dot\cup Y| = |X|$ ☐

__Eserc__: $\alpha<\beta \Rightarrow \aleph_\alpha < \aleph_\beta$.

__Teo__: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$ (α infinito)

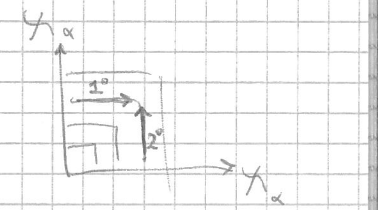
__Cor__: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta = \aleph_\alpha + \aleph_\beta$ se $\alpha \leq \beta$.

↳
- $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.
- $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta \geq 1 \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.
- $\underset{\underset{\aleph_\beta}{\vee|}}{\aleph_\alpha + \aleph_\beta} \leq \aleph_\beta + \aleph_\beta = 2 \cdot \aleph_\beta \leq \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta$. ☐

↳ Induzione su α:

- $\alpha = 0 \Rightarrow \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- Per ipot. ind. $\forall \beta<\alpha \ \aleph_\beta \cdot \aleph_\beta = \aleph_\beta$.

Prendo $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <_{\text{quadrati}})$ t.c. $(x,y) <_q (x',y')$ se:



1.) $\max(x,y) < \max(x',y')$ oppure

2.) $\max(x,y) = \max(x',y') \wedge (x<x')$ oppure

3.) " $\wedge (x=x') \wedge (y<y')$

$(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <_q) \simeq (\aleph_\alpha, \in)$ __Eserc__: mostrare che $<_q$ è buon ordine.

Sia $J \underset{\text{segm}}{\in} (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <_q) \Rightarrow J = \{(x,y) \mid (x,y) <_q (a,b)\}$.

Sia $\gamma = \max(a,b) \Rightarrow J \subseteq \{(x,y) \mid x \leq \gamma \wedge y \leq \gamma\} = Q \times Q$ con $Q = \{x \mid x \leq \gamma\}$. → è un quadrato.

$\gamma \in \aleph_\alpha \Rightarrow |\gamma| < \aleph_\alpha \Rightarrow |J| \leq \underbrace{|Q|}_{<\aleph_\alpha} \cdot \underbrace{|Q|}_{<\aleph_\alpha}$ → $= |Q| = \aleph_\beta$ (ip ind) $\Big\} \Rightarrow < \aleph_\alpha$.

perché $\aleph_\alpha$ è limite

$=$ finito

Quindi tutti i segmenti propri di $(\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, <_q)$ hanno cardinalità minore di $\aleph_\alpha$. Di conseguenza $|\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| \leq \aleph_\alpha$.

Quindi abbiamo dimostrato che:

$\aleph_\alpha \leq \aleph_\alpha \cdot \aleph_\alpha = |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| \leq \aleph_\alpha$. Concludiamo per C.B. ☐

__Cor__: $\aleph_\alpha \cdot \aleph_\beta = \max(\aleph_\alpha, \aleph_\beta) = \aleph_\alpha + \aleph_\beta$

Def: Siano α_i cardinali $\forall i \in I$. Allora

$\sum_{i\in I} \alpha_i := \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right|$ con $|A_i| = \alpha_i$ disgiunti (esistono sempre).
$A_i = \alpha_i \times \{i\}$

$\prod_{i\in I} \alpha_i := \left|\prod_{i\in I} A_i\right|$ con $|A_i| = \alpha_i$.

Prop:
- $\left(\sum_{i\in I} k_i\right)\cdot \rho = \sum_{i\in I}(k_i\cdot \rho)$ (distributivita')
- Se $\sigma: I \to I$ bij. $\Rightarrow \sum_{i\in I} k_i = \sum_{\sigma(i)\in I} k_i$ (commutativita')
  $\Rightarrow \prod_{i\in I} k_i = \prod_{\sigma(i)\in I} k_i$
- $\sum_{i\in I} \alpha_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{j\in J_k} \alpha_j\right)$ dove $\{J_k\}_{k\in K}$ e' una partizione di I.

Prop: $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \prod_{i\in \aleph_\beta} \aleph_\alpha$

↳ $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |\{f : \aleph_\beta \to \aleph_\alpha\}| = |\{f \mid f : \aleph_\beta \to V \wedge \forall i\ f(i)\in \aleph_\alpha\}| = \prod_{i\in\aleph_\beta} \aleph_\alpha$. □

Teo: (König)

$\forall i \in I\ |A_i| < |B_i| \Rightarrow \sum_{i\in I} |A_i| < \prod_{i\in I} |B_i|$

OSS: $\sup_{i\in I} |A_i| \le \left|\bigcup_{i\in I} A_i\right| \le \sum_{i\in I} |A_i|$

Eserc: Quando sono strette?

↳ Posso assumere $A_i \subseteq B_i$.

Devo mostrare che $\nexists g$ surgettiva $g: \bigcup_{i\in I} A_i \times\{i\} \to \prod_{i\in I} B_i$. Se per assurdo esiste:

Consideriamo il diagramma:

$$\begin{tikzcd}
(x,j) \in \bigcup_{i\in I} A_i\times\{i\} \arrow[r, "g"] & \prod_{i\in I} B_i \arrow[d, "\pi_j"] & \exists (y_i)_{i\in I} \arrow[d] \\
x \in A_j \arrow[u, "\iota_j"] \arrow[r, dashed, "g_j"] & B_j & y_j
\end{tikzcd}$$

Sicuramente $g_j : A_j \to B_j$ non e' surgettiva, qualsiasi essa sia. Infatti $|A_j| < |B_j|$.
Quindi $\exists y_j \in B_j$ tc $\nexists g_j(x) = y_j$ con $x \in A_j$.

Allora se prendo tutte queste ho $y = (y_j)_{j\in I} \in \prod_{i\in I} B_i$ e non puo' essere che $\exists (x,k) \in \bigcup_{i\in I} A_i\times\{i\}$ $g(x) = y$ altrimenti ho assurdo. Assurdo. □

Cor: (Cantor)

$\aleph_0 = \sum_{i\in\aleph_0} 1 < \prod_{i\in\aleph_0} 2 = 2^{\aleph_0}$

Cor: $|\mathbb{R}| \ne \aleph_\omega$

↳ Per assurdo $|\mathbb{R}| = \aleph_\omega$; $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. $\aleph_\omega = \sup_{n\in\omega} \aleph_n \le \sum_{n\in\omega} \aleph_n < \prod_{n\in\omega} \overset{|\mathbb{R}|=\aleph_\omega}{|\mathbb{R}|} = |\mathbb{R}|^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$
Questo e' assurdo. □

Def: $(A, <_A)$, $(B, <_B)$ tot. ordinati. Dico una $f: A \to B$ cofinale se $\forall b\in B\ \exists a\in A$ tc $f(a) \ge b$.

Esempio: $i: \mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{R}$

Def: $cf(B, <_B) := \min\{\alpha \in ON \mid \exists f: \alpha \to B \text{ cofinale}\}$ cofinalita' di $(B, <_B)$.

OSS: $cf(\mathbb{R}, <_{\mathbb{R}}) = \omega$.

Prop:
1. $cf(B, <_B) < \omega \Leftrightarrow cf(B, <_B) = 1 \Leftrightarrow B$ ha massimo
2. $cf(\beta+1) = 1$ se $\beta\in ON$
3. $cf(\omega+\omega) = \omega$

↳ 2) $\beta+1 = \beta\cup\{\beta\} \Rightarrow f: 1 \to \beta+1$ tc $f(0) = \{\beta\}$.
3) $f(n) = \omega + n$

Prop:
1. $cf(\aleph_\omega) = \omega$
2. $cf(\omega_1) > \omega$; $cf(\omega_1) = \omega_1$

1) $n \overset{f}{\mapsto} \aleph_n$.

↳ 2) Sicuramente l'identita' e' cofinale quindi $1 < \omega \le cf(\omega_1) \le \omega_1$ (non ha max; id. cofinale)
Quindi $cf(\omega_1) = \omega$ o ω_1 non ci sono altre possibilita'.
Se $cf(\omega_1) = \omega$ allora $f: \omega \to \omega_1$ cofinale $\Rightarrow \omega_1 = \sup_{n\in\omega} f(n) = \bigcup_{n\in\omega} f(n) < \omega_1$. $\perp$ □

OSS: La $cf(\cdot)$ e' una funzione non crescente.

$$\begin{array}{ccccc} \omega & < & \omega_1 & < & \aleph_\omega \\ \downarrow cf & & \downarrow cf & & \downarrow cf \\ \omega & & \omega_1 & & \omega \end{array}$$

OSS:
1. $\exists f: cf(A) \to A$ cofinale.
2. Se $\beta \ge cf(A) \Rightarrow \exists f: B \to A$ cofinale
4. $\alpha\in ON$ $cf(\alpha) \le |\alpha| \le \alpha$
3. $\exists f: \beta\to\alpha$ cofinale $\Leftrightarrow \beta \ge cof(\alpha)$

↳ 4) $\exists f: |\alpha| \to \alpha$ bigettiva $\Rightarrow f$ cofinale $\Rightarrow |\alpha| \ge cf(\alpha)$

OSS: $cf(\alpha)$ e' cardinale.

↳ $|cf(\alpha)| \xrightarrow[big]{} cf(\alpha) \xrightarrow[cof]{} \alpha \Rightarrow |cf(\alpha)| \xrightarrow[cof]{} \alpha \Rightarrow |cf(\alpha)| \ge cf(\alpha)$ ma $cf(\alpha)$ e' minimo $\Rightarrow cf(\alpha) = |cf(\alpha)|$ e' cardinale □

Prop: $\gamma = \sup_{i<\beta} \alpha_i \Rightarrow cf(\gamma) \le \beta$

↳ $\beta \xrightarrow{cof} \gamma$
$i \mapsto \alpha_i$

Def: Un cardinale e' regolare se $cf(k) = k$.

Esempio: $\omega_1 = cf(\omega_1) \Rightarrow \omega_1$ e' regolare.

$\omega = cf(\aleph_\omega) \Rightarrow \aleph_\omega$ non e' regolare

Teorema: $cf(\aleph_{\alpha+1}) = \aleph_{\alpha+1}$

↳ Se per assurdo $cf(\aleph_{\alpha+1}) < \aleph_{\alpha+1} \Rightarrow cf(\aleph_{\alpha+1}) \leq \aleph_\alpha \Rightarrow \exists f: \aleph_\alpha \to \aleph_{\alpha+1}$ cofinale.

Allora $\aleph_{\alpha+1} = \sup_{i \in \aleph_\alpha} f(i) = \bigcup_{i < \aleph_\alpha} f(i) \Rightarrow |\aleph_{\alpha+1}| = |\sup_{i<\aleph_\alpha} f(i)| \leq \sum_{i<\aleph_\alpha} |f(i)| \leq \sum_{i<\aleph_\alpha} \aleph_\alpha = \aleph_\alpha$

ma $|\aleph_{\alpha+1}| = \aleph_{\alpha+1}$. $\perp$. ☒

Prop: $cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$

Teorema: $cf(2^{\aleph_\alpha}) > \aleph_\alpha$

↳ Sia $\vartheta = cf(2^{\aleph_\alpha})$. $f: \vartheta \to 2^{\aleph_\alpha}$ cofinale $\Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} = \sup_{i<\vartheta} f(i)$

$$|2^{\aleph_\alpha}| = |\sup_{i<\vartheta} f(i)| \leq \sum_{i<\vartheta} |f(i)| \underset{\text{König}}{<} \prod_{i<\vartheta} 2^{\aleph_\alpha} = (2^{\aleph_\alpha})^\vartheta \Rightarrow 2^{\aleph_\alpha} < (2^{\aleph_\alpha})^\vartheta = 2^{\aleph_\alpha \cdot \vartheta}$$

$\parallel$

$2^{\aleph_\alpha} \Rightarrow$ Se $\vartheta \leq \aleph_\alpha$ avrei $2^{\aleph_\alpha} < 2^{\aleph_\alpha}$ $\perp$. ■

OSS: $|\mathbb{R}| \neq \aleph_\omega$ perchè $cf(|\mathbb{R}|) = cf(2^{\aleph_0}) > \aleph_0$ mentre $cf(\aleph_\omega) = \omega = \aleph_0$.

Esercizio: $|Borel| = ?$ $\quad |Borel(\mathbb{R})| = 2^{\aleph_0}$ mentre $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| = 2^{2^{\aleph_0}}$

↳ Sia $(G, \cdot)$ gruppo e $A \subseteq G$ sottoinsieme. Consideriamo $\langle A \rangle < G$.

$\langle A \rangle = \bigcup_n A_n$ con $A_0 = A$ e $A_{n+1} = A_n \cdot A_n^{-1}$. Vale $A_0 \subset A_1 \subset \dots$

↳ Sicuramente $\bigcup_n A_n \subset \langle A \rangle$ perchè $A_n \subset \langle A \rangle \ \forall n$. Inoltre $\bigcup_n A_n$ e' gruppo:

Infatti se $a, b \in \bigcup_n A_n$ $a \in A_n$ e $b \in A_k \Rightarrow a, b \in A_{\max(n,k)=m} \Rightarrow a \cdot b^{-1} \in A_{m+1} \subseteq \bigcup_n A_n$

Quindi $|\langle A \rangle| = |\bigcup_{n\in\omega} A_n|$.

Se $|A| \leq \aleph_\alpha \Rightarrow$ per induzione $|A_n| \leq \aleph_\alpha \Rightarrow |\langle A \rangle| = |\bigcup_{n\in\omega} A_n| \leq \sum_{n\in\omega} |A_n| \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_\alpha = \aleph_0 \cdot \aleph_\alpha$

$\Rightarrow |\langle A \rangle| \leq \aleph_\alpha$.

Vediamo poi i Borel. Sono la più piccola σ-algebra su $\mathbb{R}$ che contiene gli intervalli. {Chiusa per unione arbitraria e compl.

Se $A_n \in Borel \Rightarrow \bigcap_n A_n = (\bigcup_n A_n^c)^c \in Borel$.

$\{x\} \in Borel \Rightarrow \mathbb{Q} \in Borel$ perchè $\mathbb{Q}$ numerabile. $\Rightarrow \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \in Borel$. $\quad \parallel \mathbb{Q}^c$

↳ $\{a\} = \bigcap_n]a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}[$

Si usano due operazioni per i Borel: $A \longmapsto A^c$ e $\{A_n\} \longmapsto \bigcup_n A_n$

Quindi $Borel = \{\sigma\text{-alg generata tramite complemento e unione dagli aperti} \subseteq \mathbb{R}\}$.

Siano:

$\mathcal{B}_0 = \{]a,b[\mid a, b \in \mathbb{R}\}$; $\quad \mathcal{B}_{n+1} = \mathcal{B}_n \cup (\mathcal{B}_n^c) \cup (\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_n)$, allora $Borel \supsetneq \bigcup_{n\in\omega} \mathcal{B}_n$.

Per averli tutti dobbiamo fare $Borel = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathcal{B}_\alpha$ con $\mathcal{B}_{\alpha+1} = \mathcal{B}_\alpha \cup (\mathcal{B}_\alpha^c) \cup (\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_\alpha)$

$\mathcal{B}_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{B}_\alpha$

Vediamo che $Borel = \mathcal{B}_{\omega_1}$.

↳ Se $\alpha < \omega_1 \Rightarrow \mathcal{B}_\alpha \subseteq Borel$ (ind. su α):

Se $\alpha = \beta + 1 \Rightarrow \mathcal{B}_\beta \subseteq Borel \Rightarrow \mathcal{B}_\alpha = \mathcal{B}_\beta \cup (\mathcal{B}_\beta^c) \cup (\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_\beta) \subseteq Borel$.

Se $\alpha = \sup_{\beta<\alpha} \Rightarrow$ ovvio perchè $\mathcal{B}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{B}_\beta \subseteq Borel$.

Mostriamo che $\mathcal{B}_{\omega_1} = \mathcal{B}_{\omega_1+1} = \dots$

Basta mostrare che $\mathcal{B}_{\omega_1}$ e' σ-algebra.

Se $A \in \mathcal{B}_{\omega_1} \Rightarrow \exists \alpha$ t.c. $A \in \mathcal{B}_\alpha \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$

Se $A_n \in \mathcal{B}_{\omega_1} \Rightarrow \exists \alpha_n$ t.c. $A_n \in \mathcal{B}_{\alpha_n} \Rightarrow \sup_n \alpha_n < \omega_1$ perchè $cf(\omega_1) = \omega_1 > \omega$.

$\Rightarrow A_n \in \mathcal{B}_\alpha \ \forall n \Rightarrow \bigcup_{\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}_{\alpha+1} \subseteq \mathcal{B}_{\omega_1}$.

Per induzione su α vediamo che $|\mathcal{B}_\alpha| \leq 2^{\aleph_0}$.

- $|\mathcal{B}_0| = |\{\text{aperti interv}\}| \leq |\mathbb{R} \times \mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$
- $|\mathcal{B}_{\alpha+1}| \leq |\mathcal{B}_\alpha| + |\mathcal{B}_\alpha| + |\{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_\alpha\}| \leq 2^{\aleph_0} + |\{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_\alpha\}|$

Poichè $\prod_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_\alpha \to \{\bigcup_{\mathbb{N}} \mathcal{B}_\alpha\}$ e' surgettiva, allora:

$(A_n | n \in \mathbb{N}) \longmapsto \bigcup_n A_n$

$|\mathcal{B}_{\alpha+1}| \leq 2^{\aleph_0} + 2^{\aleph_0} + (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

ci interessano solo i $\lambda < \omega_1$

- $|\mathcal{B}_\lambda| = |\bigcup_{\alpha<\lambda} \mathcal{B}_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\lambda} |\mathcal{B}_\alpha| \leq \sum_{\alpha<\lambda} 2^{\aleph_0} = \lambda \cdot 2^{\aleph_0} \leq \omega_1 \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

Quindi $|Borel| = 2^{\aleph_0}$ mentre $\mathcal{P}(\mathbb{R}) = 2^{2^{\aleph_0}}$ e la maggior parte dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non sono Borel, eppure e' difficile fornirne uno.

Esercizio: Scrivere $\mathcal{B}$ facendo solo complementi, unioni num. disgiunte e unioni finite (qualsiasi). 23 - 02/05/16

Lemma: (di Zorn)

Sia $(A, \leq_A)$ ordine parziale (riflessivo, transitivo, antisimmetrico) e induttivo.
Allora $\exists b \in A$ massimale.

Esercizio: Sia C catena di $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Trovare C t.c. $|C| = 2^{\aleph_0}$. (si fa coi razionali)

Esercizio: Sia C catena di $\mathcal{P}(X)$. Stimare $|C|$. (Qui X è qualsiasi)

Def: $(A, \leq_A)$ si dice induttivo se ogni sua catena ha un maggiorante, cioè $\exists b \in C$ t.c. $\forall a \in C \ \ b \geq a$.

Esempio:
- X insieme $\Rightarrow (\mathcal{P}(X), \subseteq)$ induttivo
- $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$ non è induttivo (nel senso delle catene)

↳ Sia $\alpha = H(A)$. Per assurdo suppo che non ci sia massimale.

Sia $S : \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \to A^{\cup\{*\}}$ funzione di scelta.

Per induz. definiamo:

$$x_0 := S(A) \ ; \quad x_{\beta+1} := \begin{cases} S(\{x \in A \mid x > x_\beta\}) \\ * \quad \text{se } \emptyset \end{cases}$$
← non si verifica, altrimenti x_β è massimale (vediamo poi)

$$x_\lambda := \begin{cases} S(\{x \in A \mid x \geq x_\beta \ \ \forall \beta < \lambda\}) \\ * \quad \text{se } \emptyset \end{cases}$$
← non si verifica, altrimenti la catena $C = \{x_\beta \mid \beta < \lambda\}$ non avrebbe maggiorante. (Vediamo poi)

Sia $x : \alpha \to A$, $\beta \mapsto x_\beta$. Allora non può essere iniettiva perché $|\alpha| > |A|$.

Dimostriamo che $x_\beta, x_{\beta'} \neq *$ e $\beta < \beta' \Rightarrow x_\beta < x_{\beta'}$. Induz. su β'.

Se $\beta' = 0$: non c'è nulla da mostrare.

Se $\beta' = \gamma + 1$: $\quad x_\gamma \neq *$ per ip. indutt., x_γ non è massimale $\Rightarrow x_{\gamma+1} = S(\{x \in A \mid x > x_\gamma\})$ e $x_{\gamma+1} > x_\gamma$.

Se $\beta' = \lambda$: se $\gamma < \vartheta < \lambda \underset{\text{ip. ind.}}{\Rightarrow} x_\gamma < x_\vartheta \Rightarrow \{x_\gamma \mid \gamma < \lambda\}$ è catena
$\Rightarrow \exists$ maggiorante della catena $\Rightarrow \{x \in A \mid x \geq x_\beta \ \ \beta < \lambda\}$ sono i maggioranti della catena $\Rightarrow x_\lambda = S(\{x \in A \mid x \geq x_\beta \ \ \beta < \lambda\})$ e $x_\lambda > x_\vartheta > x_\gamma$.
Quindi $x_\lambda > x_\beta$ perché $x_\lambda \geq x_\beta$ e $x_\lambda \geq x_{\beta+1}$.

Ma allora $x : \alpha \to A$ è iniettiva, $\perp$. ☒

Teo: AC $\Leftrightarrow$ Zorn $\Leftrightarrow$ Zermelo

↳ ~~Dim~~ Già visto: AC $\Rightarrow$ Zorn e AC $\Leftrightarrow$ Zermelo e quindi Zermelo $\Rightarrow$ Zorn.

$\Leftarrow$) la vedremo.

Teo: Sia K campo. Ogni K-sp. vett. ha una base.

↳ Ricordiamo che:

Lemma: $\mathcal{B}$ base $\Leftrightarrow \mathcal{B}$ è indipendente massimale.

Sia ora $A = \{I \subseteq V \mid I \text{ indip}\}$ e ordino A con l'inclusione.
Vedo che $(A, \subseteq)$ è induttivo.
Se $\{I_j \mid j \in J\}$ è una catena $\Rightarrow \bigcup_j I_j$ è maggiorante, infatti è ancora indipendente.
Allora per Zorn esiste un massimale indipendente $\Rightarrow V$ ammette base. ☒

Esercizio: Trovare una base di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{Q}$ (base Hamel). Calcolare $|\mathcal{B}|$.

$$\mathbb{R} = \mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B}) = \{\sum_{i=1}^{m} q_i r_i \mid m \in \mathbb{N}, q_i \in \mathbb{Q}, r_i \in \mathcal{B}\}.$$

↳ Scrivo $\sum_{r \in \mathcal{B}} q_r \cdot r$ quindi costruisco $q : \underset{\in \mathcal{B}}{r} \mapsto q_r \in \mathbb{Q}$ e cerco $\{q \mid \mathrm{supp}(q) \text{ finito}\}$.

$$|\{q \mid \mathrm{supp}(q) \text{ finito}\}| \leq \sup_m |I|^m$$

(Continua ~~prossima~~ lez.)

Usando i primi due esercizi della lez. successiva, abbiamo:

$$2^{\aleph_0} = |\mathrm{Span}_{\mathbb{Q}}(\mathcal{B})| = |\mathrm{Fun}_{<\omega}(\mathcal{B}, \mathbb{Q})| = \max(|\mathcal{B}|, |\mathbb{Q}|) \Rightarrow |\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}.$$

24 - 03/05/16

Esercizio: $\mathcal{P}_{<\omega}(A)$ = parti finite di A.

$|\mathcal{P}_{<\omega}(A)| = ?$

$\to \mathcal{P}_{<\omega}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_{\leq n}(A)$ e $|\mathcal{P}_{\leq n}(A)| \leq |\overbrace{A\times \dots \times A}^{n}| = |A|^n \overset{\text{se A infinito}}{=} |A|$

$\Rightarrow |\mathcal{P}_{<\omega}(A)| \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} |A| = \aleph_0 \cdot |A| \Rightarrow |\mathcal{P}_{<\omega}(A)| = |A|$ se A è infinito.

Esercizio: Dati insiemi A, B (con $0 \in B$) siano $\mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B) := \{f \mid f: A\to B \wedge \mathrm{supp}(f) \text{ finito}\}$.

Qui $\mathrm{supp}(f) = \{a\in A \mid f(a) \neq 0\}$.

$|\mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B)| = ?$

$\to \mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Fun}_{\leq n}(A,B) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f \mid f: C\to B \wedge C \in \mathcal{P}_{\leq n}(A)\} = \bigcup_{S\in\mathcal{P}_{<\omega}(A)} \{f: A\to B \mid S = \mathrm{supp}(f)\}$

$|\mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B)| \leq \sum_{S\in\mathcal{P}_{<\omega}(A)} |B|^{|S|} = \sum_{S\in\mathcal{P}_{<\omega}(A)} |B| = |\mathcal{P}_{<\omega}(A)| \cdot |B| = |A|\cdot|B|$

↳ S finito se B infinito ↳ se A infinito

In generale:

$|\mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B)| \leq |\mathcal{P}_{<\omega}(A)| \cdot \max(\aleph_0, |B|) = \max(\aleph_0, |B|, |\mathcal{P}_{<\omega}(A)|) = \max(\aleph_0, |A|, |B|)$.

Quindi $|\mathrm{Fun}_{<\omega}(A,B)| = \max(|A|, |B|, \aleph_0)$.

→ Indovinello dei cappelli infinitario

Esercizio: Sia $V = \prod_{i\in\omega} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $b\in V \Rightarrow b = (b_i \mid i\in\omega)$ e $x_i \in \{0,1\}$. Trovare una base.

$\to \mathcal{B} = \{e_1, e_2, \dots\} \cup \{\text{altre cose}\}$ $\quad e_i = (0, \dots, 0, \overset{i}{1}, 0, \dots)$.

Usiamo AC per avere base $\mathcal{B}$ che contiene gli $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. In particolare Zorn.

$|V| = |\mathrm{Span}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}(\mathcal{B})| = \max(\aleph_0, |\mathcal{B}|, |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}|) = \max(\aleph_0, |\mathcal{B}|)$; $|V| = |\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}|^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

$\Rightarrow |\mathcal{B}| = 2^{\aleph_0}$.

Una volta fissata la base possiamo definire la parità (il segno) di una successione $v\in V$.

Se $\mathcal{B} = \{\varepsilon_i \mid i < 2^{\aleph_0}\}$ diciamo $v = \sum_{i<2^{\aleph_0}} c_i \varepsilon_i = \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}} c_\varepsilon \varepsilon$ e $\mathrm{sgn}(v) := \sum_{\varepsilon\in\mathcal{B}} c_\varepsilon \pmod 2$

Per i cappelli se $v = (1,0,1,\dots)$ è la succ di cappelli $\Rightarrow$ il primo dice "$\mathrm{sgn}(\hat{v})$" con

$\hat{v} = (0,0,1,\dots)$ cioè $\hat{v} = \begin{cases} v & \text{se } v_1 = 0 \\ v + e_0 & \text{se } v_1 = 1 \end{cases}$. E così tutti gli altri sanno tutto.

Teo: Zorn $\Rightarrow$ Zermelo

↳ Sia A insieme. Lo voglio bene ordinare.

Cerco $\mathcal{P} = (P, \preccurlyeq)$ tale che un massimale di $\mathcal{P}$ sia buon ordine su A.

Quindi $P = \{(B, <_B) \mid B \subseteq A \text{ e } <_B \text{ buon ordine su } B\}$ e ordino P con

$(B, <_B) \preccurlyeq (C, <_C)$ se $<_C|_B = <_B$ e B segm. iniz. di $(C, <_C)$.

A questo punto $\mathcal{P} = (P, \preccurlyeq)$ è induttivo (Zorn-like). esercizio: verificare.

Esiste quindi massimale in $\mathcal{P}$. Sia esso $(M, <_M)$. Noi vogliamo che $M = A$.

Se no, $\exists a \notin M$ ma allora se definisco $M' = M \cup \{a\}$ e $M <_{M'} a \Rightarrow (M', <_{M'})$ estende

$(M, <_M)$ $\perp$. Infatti rimane segm. iniziale. ☒

Cor: Zorn $\Rightarrow$ AC.

↳ esercizio: usare una dimostrazione diretta.

Esercizio: Persone in fila possono guardare tutti quelli davanti. Bisogna fare in modo che il minor numero di persone sbagli. Si può fare che ci siano solo un numero finito di errori su $\aleph_0$ persone.

→ per soluz. chiedere a Berarducci.

Gerarchia di Von Neumann

25 - 05/05/16

$V_0 := \emptyset$; $V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$; $V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$ se λ limite.

Allora:

$V_1 = \mathcal{P}(V_0) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$

$V_2 = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$V_3 = \mathcal{P}(V_2) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Vale che $|V_{n+1}| = 2^{|V_n|} = \left.2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}\right\}^{n} =$

$V_\omega = \bigcup_{n\in\omega} V_n \Rightarrow |V_\omega| = \aleph_0$ perché $|V_\omega| \leq \sum_{n\in\omega} |V_n| \leq \sum_{n\in\omega} \aleph_0 = \aleph_0$

$|V_{\omega+1}| = 2^{|V_\omega|} = 2^{\aleph_0}$

Sia ora $WF := \bigcup_{\alpha\in ON} V_\alpha$ cioè $\overbrace{x\in WF}^{WF(x)} \Leftrightarrow \exists \alpha \in ON\ (x\in V_\alpha)$

WF è la più piccola classe che contiene il $\emptyset$ ed è ~~chiusa~~ per parti e unioni.

Teo. $V = WF$, cioè $\forall x\,(x\in WF)$, se vale l'assioma di fondazione.

Oss: Se non vale la fondazione, avrei qualcosa del tipo $a = \{a\}$ e se definisco $\text{rango}(x) = \rho(x) := \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$ $\Rightarrow$ l'insieme a sarebbe senza rango.

Il teorema ci dice quindi che usando l'assioma di Fondazione è possibile creare tutti gli insiemi usando i V_α.

→ Dobbiamo mostrare che $\forall x\, \exists \alpha\, (x\in V_\alpha)$.

Lemma: 1) $x\in y\in V_\alpha \Rightarrow x\in V_\alpha$

2) $\beta<\alpha \Rightarrow V_\beta \subset V_\alpha$ (**esercizio**: $|V_\beta| < |V_\alpha|$)

→ Per induz. su α:

1) Se α limite, $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta \supseteq \underbrace{V_\beta}_{\text{transitivo per ip. indutt.}}$ se $\beta<\alpha$.

Quindi V_α transitivo.

Se $\alpha = \gamma+1$, $x\in y\in V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow x\in y\subset \overset{\text{transitivo ip ind}}{V_\gamma} \Rightarrow x\in V_\gamma \underset{\text{transit}}{\Rightarrow} x\subseteq V_\gamma \Rightarrow x\in V_{\gamma+1}$. $V_{\gamma+1}$ trans.

2) Ne segue che $V_\gamma \subset V_{\gamma+1}$ e si procede per induzione. ☑

→ Usiamo la funzione bef

$\beth_0 := \omega$, $\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$

$\beth_\lambda := \sup_{\alpha<\lambda} 2^{\beth_\alpha}$

esercizio: $\aleph_\alpha \leq \beth_\alpha$

(ipotesi generalizz. del continuo)

↳ GCH: $\aleph_\alpha = \beth_\alpha$

esercizio: $|V_{\omega+\alpha}| = \beth_\alpha$

↳ induz. su α. Serve il lemma accanto.

Esercizio: $\exists \alpha\ \beth_\alpha = \alpha$

↳ $\beta_0 = \beta \in ON$, $\beta_{n+1} = \beth_{\beta_n}$ e $\beta_\omega := \sup_n \beta_n$. Allora dico che $\beth_{\beta_\omega} = \beta_\omega$.

Vale $\beta_n < \beta_{n+1} \Rightarrow \beta_\omega$ è ordinale limite. Anzi è un cardinale (lo sono da β_1 in poi)

Quindi $\beth_{\beta_\omega} = \sup_n \beth_{\beta_n} = \sup_n \beta_{n+1} = \sup_n \beta_n = \beta_\omega$. ☑

→ Altrimenti $\beta_n = \beta_{n+1}$ e ho finito.

Cor. Per ogni $\alpha\in ON$ $\exists \beta>\alpha$ tc $\beta = \beth_\beta$. Allora $\{\beta\in ON \mid \beta = \beth_\beta\}$ è illimitato superiorm. quindi è una classe propria. Cioè i punti fissi di $\beth_\alpha$ sono tanti.

Punti Fissi

Sia $f: ON \to ON$ ad esempio $\alpha \mapsto \aleph_\alpha$, $\alpha\mapsto \beth_\alpha$, $\alpha\mapsto \omega^\alpha$.

Supponiamo che f sia $\overset{\text{strett.}}{\text{crescente}}$ e tc $f(\sup_i \alpha_i) = \sup_i f(\alpha_i)$ cioè "f è continua per una opportuna topologia".

Teo: Nelle ipotesi precedenti, $\forall \alpha\ \exists \beta\ (f(\beta)=\beta)$.

↳ Come prima. ☑ (usiamo che $x\leq f(x)$ perché f strett. cres. su ON).

Esempio: • $2^{|x|} = 2^{|y|} \not\Rightarrow |x| = |y|$

• $f: ON\to ON$, $f(x) = \omega^x$ (nel senso ordinale) $\Rightarrow \varepsilon_0 := \min\{\alpha \mid \omega^\alpha = \alpha\}$.

Quindi $f(\varepsilon_0) = \omega^{\varepsilon_0} = \varepsilon_0 = \sup\{\omega, \omega^\omega, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}$

Oss/Esercizio: Prendiamo ω_1 e immaginiamo un treno che si ferma a ogni "stazione" = elem. di ω_1 e a ogni fermata salgono $\aleph_0$ passeggeri e ne scende 1 di quelli saliti in precedenza.

Fatto: Esiste una fermata a cui il treno arriva vuoto!

Teo: (Fodor)

Sia $f: \omega_1 \to \omega_1$ tc $\underbrace{f(x)<x \text{ se } x\neq 0}_{\text{regressiva}} \Rightarrow \exists c\in\omega_1\ |\{x \mid fx = c\}| = \aleph_1$

Cor: $f: \omega_1 \to \omega_1$ tc $f(x) = y$ sse (il passeggero che scende a staz. x era salito alla staz. y). Quindi $fx < x$.

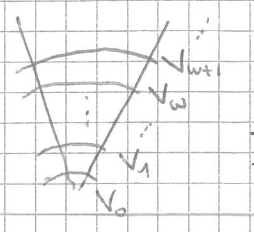
Allora il treno si svuota.

→ Se non si svuota mai, f è sempre ben. def. $\overset{\text{Fodor}}{\Rightarrow}$ per una quantità più che numerabile di stazioni, S tc $|S| = \aleph_1$, tc $f(s) = c$ $\forall s\in S$ ma questo vuol dire che tutti quelli che scendono nelle tante S erano tutti saliti in c. Ma in c ne salgono $\aleph_0$ e non $\aleph_1$.

Oss: la differenza fra classi e insiemi è la seguente: gli insiemi sono contenuti in qualche V_α, mentre le classi non sono limitate nella gerarchia.

26 - 9/05/16

Per dare una visualizzazione della gerarchia, gli insiemi sono tutte e sole le parti di V che si trovano sotto un livello V_α:



Possiamo ora dimostrare il teorema che avevamo cominciato.

<u>Teo</u>: $V = WF$

loc. piccola: $Z = \{x \mid x \in Z\}$ e' un insieme (non ho catene disc. infinite di appartenenza)

$\hookrightarrow$ L'assioma di fondazione dice che l'$\in$ e' una rel. ben fondata e loc. piccola. Possiamo definire una funzione rango $\rho: V \to ON$ in modo che $\rho(x) = \bigcup \{\rho(y)+1 \mid y \in x\}$ e $\rho(\emptyset) = 0$.

Una volta che mostreremo che $\rho(x) \in ON \Rightarrow \rho(x) = \sup\{\rho(y)+1 \mid y \in x\}$.

Lo facciamo per induzione su x: se $\forall y \in x$ vale la formula $\Rightarrow \rho(y) \in ON \Rightarrow \rho(y)+1 \in ON$
$\Rightarrow \rho(x) \in ON$.

Per l'assioma fond. $\rho: V \to ON$ e' ben definito su tutti gli insiemi. Ora vale:

<u>Lemma</u>: $x \in V_\alpha \iff \rho(x) < \alpha$

$\hookrightarrow$ $\Rightarrow$) Indut. su α. Sia $x \in V_\alpha$. Due casi:

- α limite $\Rightarrow \exists \beta < \alpha\ x \in V_\beta \overset{\text{ip. ind}}{\Rightarrow} \rho(x) < \beta \Rightarrow \rho(x) < \alpha$.
- $\alpha = \gamma + 1 \Rightarrow x \in V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow x \subseteq V_\gamma \Rightarrow \forall y \in x\ y \in V_\gamma \Rightarrow \rho(y) < \gamma \Rightarrow \rho(x) \leq \gamma < \alpha$

$\Leftarrow$) Se $\rho(x) < \alpha$ ho due casi:

- α limite $\Rightarrow \exists \beta < \alpha\ \rho(x) < \beta \overset{\text{ip}}{\Rightarrow} x \in V_\beta \subseteq V_\alpha \Rightarrow x \in V_\alpha$
- $\alpha = \gamma+1 \Rightarrow \rho(x) < \gamma + 1 \overset{\text{ip}}{\Rightarrow} \forall y \in x\ y \in V_\gamma \Rightarrow x \subseteq V_\gamma \Rightarrow x \in \mathcal{P}(V_\gamma) = V_{\gamma+1}$. ☒

Questo conclude la dimostrazione del teorema. ☒

Vale anche il viceversa:

<u>Teo</u>: $V = WF \Rightarrow$ Fondazione

$\hookrightarrow$ Definiamo $\rho^*(x) = \min\{\alpha \mid x \in V_{\alpha+1}\}$ con $\rho^*: V \to ON$.

Basta mostrare che $\rho^*(y) < \rho^*(x)$ se $y \in x$.

Se $\rho^*(x) = \gamma \Rightarrow x \in V_{\gamma+1} = \mathcal{P}(V_\gamma) \Rightarrow x \subseteq V_\gamma \Rightarrow y \in V_\gamma \Rightarrow \rho^*(y) < \gamma$

bisogna fare i casi limite e succ.

<u>Oss</u>: Se accettiamo $V = \{x \mid x = x\}$ e ZF si può costruire $WF \subseteq V$ e restringendo a WF le formule allora $WF \models ZF$ + Fondazione.

$\models$: verifica

Cioe' WF e' un sottomodello di V che verifica la Fondazione.

<u>Esercizio</u>: $x \in WF \Rightarrow \mathcal{P}(x) \in WF$ (senza usare Fondazione)

<u>Esercizio</u>: $\binom{\aleph_\alpha}{\aleph_\beta} := |\mathcal{P}_{\aleph_\beta}(\aleph_\alpha)| = |\{x \mid x \subseteq \aleph_\alpha \wedge |x| = \aleph_\beta\}|$ se $\beta \leq \alpha$.

$\hookrightarrow$ $f: \aleph_\beta \to \aleph_\alpha$ iniettiva $\Rightarrow \mathrm{Im}(f) \in \mathcal{P}_{\aleph_\beta}(\aleph_\alpha) \Rightarrow \binom{\aleph_\alpha}{\aleph_\beta} \leq |\{f: \aleph_\beta \to \aleph_\alpha\}| \leq \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$

se $f: \aleph_\beta \to \aleph_\alpha \Rightarrow f \subseteq \aleph_\beta \times \aleph_\alpha \Rightarrow |f| = \aleph_\beta \Rightarrow f \in \mathcal{P}_{\aleph_\beta}(\aleph_\beta \times \aleph_\alpha)$

$\Rightarrow \aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = |\mathrm{Fun}(\aleph_\beta, \aleph_\alpha)| \leq |\mathcal{P}_{\aleph_\beta}(\aleph_\beta \times \aleph_\alpha)| = |\mathcal{P}_{\aleph_\beta}(\aleph_\alpha)| \Rightarrow \binom{\aleph_\alpha}{\aleph_\beta} = \aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$

<u>Esercizio</u>: Sia R rel. binaria su classe A. Allora sono equiv:

1) R ben fondata ($\forall x \neq \emptyset$ insieme $\subseteq A\ \exists y \in x\ \forall z \in x\ \neg zRy$)
2) $\nexists f\ f: \mathbb{N} \to A\ \forall n\ f(n+1) R f(n)$

$\hookrightarrow$ 1) $\Rightarrow$ 2) facile.

2) $\Rightarrow$ 1): non ben fondata $\Rightarrow \exists x \subseteq A$ insieme t.c. x non ha R-minimali. Costruisco f con l'assioma Scelta: $f(0) = \text{Scelta}(X)$; $f(n+1) = \text{Scelta}(\{a \in X \mid aRf(n)\})$.

<u>Indut. su Rel. ben. fond. + loc. piccola</u>

R rel. b.f. + loc. picc. su A classe, $\varphi(x)$ formula. Voglio $\forall x \in A\ \varphi(x)$, allora posso fare:

$\forall x(\forall y R x\ \varphi(y) \to \varphi(x)) \Rightarrow \forall x \in A\ \varphi(x)$.

<u>Prop</u>: R ben fondata + loc. picc. $\Rightarrow$ Principio Induzione

$\hookrightarrow$ Assumiamo il passo. Sia $x \in A$. Se $\neg\varphi(x) \Rightarrow \exists a \in A$ t.c. minimale e $\neg\varphi(a)$.

perche' loc. picc. altrimenti potevo avere classe

Ma allora $\forall y R a\ \varphi(y)$ e' vera e per ipotesi $\varphi(y) \to \varphi(a) \Rightarrow \varphi(a)$ vera $\perp$ ☒

Vediamo che ogni sottoclasse B ha minimale. Fisso $b \in B$ e cerco in $\{x \mid x R^* b\} \cap B$.

<u>Oss</u>: Se per assurdo $d \in B\ dRc \Rightarrow dRc \wedge cRb$ ma se R non transitiva non posso concludere.

Per questo uso R^*. Devo pero' dimostrare che esiste.

Siano $C_0 = \{x \mid xRb\}, \dots, C_{n+1} = \{x \mid \exists y\ xRy \wedge y \in C_n\}$ sono tutti insiemi (loc. picc)

$C := \bigcup_n C_n = \{x \mid x R^* b\}$. E' un insieme. Posso fare la dim. di prima. ☒