IL TEOREMA SPETTRALE HERMITIANO
OPERATORI NORMALI COMPLESSI E REALI

R. BENEDETTI

Fissiamo il contesto e alcune notazioni usati in queste note.

Lavoreremo sul campo degli scalari $\mathbb{C}$.

(V, Φ) indicherà uno spazio vettoriale V complesso, $\dim V = n$, munito del prodotto Hermitiano Φ *definito* > 0. Per ogni vettore v di V, $\| v \| := \sqrt{\Phi(v,v)}$, per cui se $v \neq 0$, $\frac{v}{\|v\|}$ è il vettore unitario ottenuto normalizzando v.

Ogni sottospazio W di V sarà munito del prodotto Hermitiano ristretto $\Phi|W$ che sarà anch'esso definito positivo.

Se W è un sottospazio di V, quando scriveremo

$$W = W_1 \perp \cdots \perp W_k$$

intenderemo che

$$W = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$$

ed inoltre per ogni $v_i \in W_i$ e $v_j \in W_j$, $i \neq j$, si ha che $\Phi(v_i, v_j) = 0$. In tal caso diremo che il sottospazio W è *somma diretta/ortogonale* dei sottospazi W_j.

Un endomorfismo di V munito di Φ è spesso chiamato anche un *operatore*, adotteremo qui questa terminologia. Dato un operatore $f : V \to V$, l'operatore *aggiunto* f^* di f rispetto a Φ è caratterizzato dalla proprietà che per ogni $v, w \in V$:

$$\Phi(f^*(v), w) = \Phi(v, f(w)) \ .$$

In un sistema di coordinate su V relativo ad una qualsiasi base *unitaria* rispetto a Φ, se $X = [v]$, $Y = [w] \in \mathbb{C}^n$ sono le rispettive coordinate, allora $\phi(v,w) = X^t I \overline{Y}$; se per ogni $v \in V$, $[f(v)] = AX$, e $[f^*(v)] = A^* X$, dove A e A^* sono matrici $n \times n$ complesse, allora $A^* = \overline{A}^t$. Infatti, deve valere per ogni $X, Y \in \mathbb{C}^n$ che $X^t (A^*)^t \overline{Y} = X^t \overline{AY}$, da cui $A^* = \overline{A}^t$. Si osservi che $f \to f^*$ definisce un automorfismo *anti*-lineare dello spazio degli operatori, e che $(A^*)^* = A$, cioè equivalentemente $(f^*)^* = f$.

Il *gruppo unitario* (o degli operatori unitari di (V, Φ)), $U(\Phi)$ consiste degli operatori invertibili $f \in GL(V)$ tali che, per ogni $v, w \in V$, $\Phi(v,w) = \Phi(f(v), f(w))$. Se $[f(v)] = AX$, come sopra rispetto ad una qualsiasi base unitaria di (V, Φ), allora $f \in U(\Phi)$ se e solo se $A^{-1} = \overline{A}^t = A^*$, se e solo se $f^{-1} = f^*$. Le matrici che verificano quest'ultima proprietà formano il *gruppo unitario classico* (matriciale) $U(n)$.

1. Operatori unitariamente diagonalizzabili - TSH

Un operatore f di $V, \Phi)$ è *unitariamente diagonalizzabile* se esiste una base unitaria di (V, Φ) formata da autovettori di f; equivalentemente V è la somma diretta/ortogonale degli autospazi di f:

$$V = V_{\lambda_1}(V) \perp \cdots \perp V_{\lambda_k}(V)$$

dove $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. In termini matriciali, se $[f(v)] = AX$ etc. etc. come sopra, allora f è unitariamente diagonalizzabile se e solo se esiste $P \in U(n)$ tale che $P^{-1}AP = \overline{P}^t AP = D$ è una matrice diagonale.

Vogliamo caratterizzare completamente gli operatori unitariamente diagonalizzabili. Supponiamo che f lo sia, allora nelle coordinate rispetto ad una base unitaria diagonalizzante, $[f(v)] = DX$, e si osserva immediatamente che $DD^* = D^*D$, cioè equivalentemente $f \circ f^* = f^* \circ f$.

Definizione 1.1. Un operatore f di V si dice *normale* (rispetto a Φ) se $f \circ f^* = f^* \circ f$, cioè se commuta con il suo aggiunto.

Segue dalle considerazioni precedenti:

Lemma 1.2. *Un operatore f di V è normale se e solo se il suo aggiunto f^* lo è. Se f è unitariamente diagonalizzabile, allora f è necessariamente normale.*

Esempio 1.3. (**Alcune classi di operatori normali.**)

- *Autoaggiunti.* Sono gli operatori tali che $f = f^*$. In termini matriciali corrispondono alle matrici Hermitiane, cioè tali che $A = \overline{A}^t$.
- *Anti-autoaggiunti.* $f = -f^*$, che corrispondono alle matrici anti-Hermitiane: $A = -\overline{A}^t$. Notare che f è anti-autoaggiunto se e solo se if è autoaggiunto.
- *Unitari .* $f^{-1} = f^*$, che corrispondono alle matrici unitarie.

Esercizi 1.4.

(1) Mostrare che se f è autoaggiunto, allora il suo spettro è reale, cioè ogni suo autovalore λ è reale ($\lambda = \overline{\lambda}$).
(2) Mostrare che se f è anti-autoaggiunto, allora il suo spettro è puramente immaginario, cioè ogni suo autovalore λ è immaginario puro ($\lambda = -\overline{\lambda}$).
(3) Mostrare che se f è unitario, allora il suo spettro è unitario, cioè ogni suo autovalore λ è della forma $\lambda = e^{i\theta}$.

Il *Teorema Spettrale Hermitiano (TSH)* che andiamo a discutere mostra che quella condizione necessaria è anche sufficiente.

Teorema 1.1. (**TSH**) *Un operatore f di (V, Φ) è unitariamente diagonalizzabile se e solo se f è normale.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima il seguente Lemma

Lemma 1.5. *Se f è un operatore normale di (V, Φ), allora λ è un autovalore di f se e solo se $\overline{\lambda}$ è un autovalore di f^*, ed inoltre i rispettivi autospazi coincidono:*

$$V_\lambda(f) = V_{\overline{\lambda}}(f^*) \ .$$

Dimostrazione del Lemma. Dobbiamo dimostrare che per ogni $v \in V$:

$$f(v) = \lambda v \Leftrightarrow f^*(v) = \overline{\lambda} v \ .$$

In effetti poiché $(f^*)^* = f$ basta dimostrare solo una delle due implicazioni (per esempio $\Rightarrow$). Poichè Φ è definito > 0,

$$f^*(v) = \overline{\lambda} v \Leftrightarrow \Phi(f^*(v) - \overline{\lambda} v, f^*(v) - \overline{\lambda} v) = 0 \ .$$

Poichè f e f^* commutano allora $V_\lambda(f)$ è f^*-invariante. Quindi $f^*(v) - \overline{\lambda} v \in V_\lambda(f)$. D'altra parte, per ogni $w \in V_\lambda(f)$, abbiamo

$$\Phi(f^*(v), w) = \Phi(v, f(w)) = \Phi(v, \lambda w) = \overline{\lambda}\Phi(v, w) = \Phi(\overline{\lambda} v, w)$$

da cui

$$\Phi(f^*(v) - \overline{\lambda} v, w) = 0$$

per cui il Lemma è dimostrato.

□

Procediamo adesso alla dimostrazione del TSH, per induzione sulla dimensione $n = \dim V \geq 1$. Per $n = 1$ il Teorema è banalmente vero. Dimostriamo il passo induttivo "$T(n-1) \Rightarrow T(n)$". Sia f un operatore normale di (V, Φ), $n = \dim V$. Sia v un autovettore di f, tale che $f(v) = \lambda v$. Poichè $v \neq 0$ e Φ è definito positivo, v è non isotropo, quindi

$$V = \mathrm{Span}(v) \perp Z_v, \ Z_v = \mathrm{Span}(v)^{\perp} \ .$$

Sappiamo per il Lemma precedente che $f^*(v) = \overline{\lambda} v$. Quindi Span$(v)$ è contemporaneamente f ed f^*-invariante. Ne segue che anche Z_v è contemporaneamente f ed f^*-invariante. Infatti se $\Phi(v, z) = 0$, $\Phi(v, f(z)) = \Phi(f^*(v), z) = \overline{\lambda}\Phi(v, z) = 0$ e questo mostra che anche $f(z) \in Z_v$. Un argomento simile mostra che anche $f^*(z) \in Z_v$. Inoltre è facile mostrare che $(f|Z_v)^* = f^*|Z_v$ (dove il primo aggiunto è inteso rispetto a $\Phi|Z_v$), da cui segue che $(f|Z_v)$ è un operatore normale di $(Z_v, \Phi|Z_v)$. Possiamo quindi applicare l'ipotesi induttiva a $(f|Z_v)$ per cui esiste una base unitaria $\{v_2, \dots, v_n\}$ di $(Z_v, \Phi|Z_v)$ composta di autovettori di $(f|Z_v)$. E' allora immediato concludere che (se necessario normalizzando l'autovettore v scelto all'inizio) $\{v_1 = \frac{v}{\|v\|}, v_2, \dots, v_n\}$ è una base unitaria di autovettori di f, e il Teorema è dimostrato.

□

Esercizi 1.6. Proponiamo in forma di esercizio alcuni corollari e applicazioni del TSH appena dimostrato.

(1) Sia f un operatore normale di (V, Φ). Dimostrare che f è autoaggiunto se e solo se ha spettro reale; f è anti-autoaggiunto se e solo se ha spettro immaginario puro; f è unitario se e solo se ha spettro unitario.
(2) Sia Ψ un altro prodotto Hermitiano su V, non necessariamente definito positivo. Dimostrare che esiste una base unitaria di (V, Φ) che è anche ortogonale per Ψ.
(3) Sia f un operatore autoaggiunto invertibile di (V, Φ). Mostrare che
$$(v, w) \to \Psi_f(v, w) := \Phi(f(v), w)$$
definisce un prodotto Hermitiano non degenere su V. Mostrare che Ψ_f è definito positivo se e solo se tutti gli autovalori di f sono > 0.
(4) Dimostrare che un operatore f di V è diagonalizzabile se e solo se esiste un prodotto Hermitiano Φ definito positivo su V tale che f sia normale (rispetto a Φ).
(5) Dimostrare che se f è un operatore diagonalizzabile di V e W è un sottospazio di V f-invariante, allora $f|W$ è diagonalizzabile. (Nota: probabilmente il lettore conosce già una dimostrazione di questo fatto che vale in generale, su un campo di scalari $\mathbb{K}$ arbitrario. Il suggerimento è di ottenere una nuova dimostrazione quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, applicando TSH.)
(6) Nelle stesse ipotesi dell'esercizio precedente, dimostrare che se $V = V_{\lambda_1}(f) \oplus \cdots \oplus = V_{\lambda_k}(f)$ è la decomposizione di V in somma diretta degli autospazi di f, allora $W = (W \cap V_{\lambda_1}(f)) \oplus \cdots \oplus = (W \cap V_{\lambda_k}(f))$. (Nota: come sopra.)
(7) Sia f un operatore normale di (V, Φ) e sia W un sottospazio di V. Mostrare che W è f-invariante se e solo se è f^*-invariante.
(8) Sia f un operatore autoaggiunto di (V, Φ), con tutti gli autovalori ≥ 0. Mostrare che esiste ed è unico un operatore g autoaggiunto con la stessa proprietà, tale che $g^2 = f$ (g è la "*radice quadrata*" di f).
(9) Sia $g \in GL(V)$. Dimostrare che esistono e sono unici un operatore autoaggiunto f di (V, Φ) con tutti gli autovalori > 0, ed un operatore unitario u tali che $g = f \circ u$ (questa è detta la *decomposizione polare* di g ed è una generalizzazione non commutativa della scrittura trigonometrica dei numeri complessi non nulli: $z = |z|e^{i\theta}$).

2. Sul principio di indeterminazione di Heisenberg.

Non pretendiamo qui di dire alcunché sulla pregnanza fisica del modello formale a cui facciamo riferimento e non esibiamo neanche un esempio concreto di sistema quanto-meccanico. Inoltre trascuriamo completamente tutta la discussione delicata relativa al fatto per la meccanica quantistica non è sufficiente limitarsi a considerare spazi di dimensione finita. Vogliamo solo mostrare come, nel contesto degli operatori autoaggiunti rispetto ad un prodotto Hermitiano definito positivo, sia possibile derivare in modo semplice una formulazione chiara del cosiddetto "principio di indeterminazione".

Descriviamo quindi questo modello formale:

- Gli "stati puri" di un sistema quanto-meccanico sono identificati con i vettori unitari di uno spazio complesso (V, Φ), $\dim V = n$, munito di un prodotto Hermitiano definito positivo, che sarà anche detto uno "spazio di Hilbert" di dimensione finita. In un sistema di coordinate rispetto ad una qualsiasi base unitaria, l'insieme degli stati puri $\mathcal{S}$ si identifica con la sfera unitaria $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \cong C^n$, dove l'ultima identificazione si ottiene ritenendo solo la struttura di $\mathbb{R}$-spazio di $\mathbb{C}^n$ (e quindi di V).
- Una (grandezza) "osservabile" f nel sistema può essere sperimentalemente misurata in ogni stato v, e il risultato delle misure $X(f, v) \in \mathbb{R}$ è a valori reali. Allora ogni osservabile f è un operatore autoaggiunto su quello spazio di Hilbert, e per ogni coppia (f, v), $X(f, v)$ è una *variabile aleatoria* (discreta) a valori nello spettro di f, $\text{Spettro}(f)$ (che come sappiamo è reale).
- Per ogni osservabile f, poiché (TSH) $V = \perp_{j=i}^{k} V_{\lambda_j}(f)$ si decompone in somma diretta/ortogonale degli autospazi di f, allora per ogni $\lambda \in \text{Spettro}(f)$ è ben definita la proiezione ortogonale $p_\lambda : V \to V_\lambda(f)$. Dati un'osservabile f e uno stato puro v,
  La probabilità che f abbia misura uguale a $\lambda \in \text{Spettro}(f)$ nello stato v è data dal quadrato della norma della proiezione ortogonale di v su $V_\lambda(f)$, cioè
  $$p(X(f, v) = \lambda) = \Phi(p_\lambda(v), p_\lambda(v)) \ .$$
  In particolare, $p(X(f, v) = \lambda) = 1$ se e solo se $v \in V_\lambda(f)$.

Supponiamo (solo per semplicità, le seguenti considerazioni si generalizzano facilmente) che f abbia autovalori semplici e quindi tutti gli autospazi 1-dimensionali. Fissiamo una base unitaria $\{v_1, \dots, v_n\}$ dello spazio di Hilbert, composta di autovettori di f: $f(v_j) = \lambda_j v_j$, $j = 1, \dots, n$. Se lo stato $v = \sum_j a_j v_j$ allora $p_{\lambda_j}(v) = a_j v_j$, per cui $p(X(f, v) = \lambda_j) = |a_j|^2$. Il fatto che v sia unitario è coerente con il fatto che la probabilità (uguale a 1) dell' *evento certo* è data dalla somma delle probabilità di eventi incompatibili esaustivi:

$$1 = \sum_j p(X(f, v) = \lambda_j) = \sum_j |a_j|^2 = \| v \| \ .$$

Se $\lambda_i \neq 0$, allora

$$p(X(f, v) = \lambda_j) = \Phi(v, a_j v_j) = \frac{1}{\lambda_j} \Phi(f(v), a_j v_j)$$

per cui il *valore (medio) atteso* per la variabile aleatoria $X(f, v)$ è dato da

$$\mu_{X(f,v)} := \sum_j \lambda_j p(X(f, v) = \lambda_j) = \Phi(f(v), v) \ .$$

Ragionando in modo simile a quanto fatto nell'Osservazione 3.2, notiamo che per ogni osservabile f sul lo spazio di Hilbert, allora $(v, w) \to \Phi(f(v), w)$ definisce un altro prodotto Hermitiano su V, per cui $F_f : v \to \Phi(f(v), v)$ è una funzione definita sull'insieme degli stati $\mathcal{S}$ a valori reali. In un sistema di coordinate relative ad una qualsiasi base unitaria dello spazio di Hilbert, rispetto al quale f è rappresentato dalla matrice Hermitiana A, F_f è la restrizione alla sfera unitaria $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n} \cong C^n$ della funzione $X \to X^t A^t \overline{X} = X^t \overline{AX}$. Per compattezza di S^{2n-1}, F_f ammette punti $v_\pm$ di massimo o minimo assoluto su $\mathcal{S}$, è questi sono autovettori dell' autovalore massimo o minimo $\lambda_\pm$ di f. L'osservabile f non è identicamente nulla se e solo se $[f] := \max\{|\lambda_+|,\ |\lambda_-|\} > 0$.

Dati f e v come prima, *l'indeterminazione* della misura $X(f, v)$ può essere espressa come la *deviazione standard* della variabile aleatoria che nella presente situazione risulta:

$$\delta[f](v) := \| f(v) - \Phi(f(v), v)v \| \ .$$

E' chiaro che v è un autovettore di f se e solo se $\delta[f](v) = 0$.

Date due osservabili f e g, poniamo $[f, g] := f \circ g - g \circ f$. Chiaramente f e g commutano se e solo se $[f, g] = 0$ è l'operatore nullo. Si osservi anche che l'operatore $i[f, g]$ è autoaggiunto.

Vogliamo dimostrare la seguente Proposizione che costituisce la formulazione promessa del "principio di indeterminazione".

Proposizione 2.1. *Date due osservabili f e g e uno stato v, allora:*

$$\delta[f](v)\delta[g](v) \geq \frac{1}{2}|\Phi([f, g](v), v)| = \frac{1}{2}|\Phi(i[f, g](v), v)| \ .$$

Corollario 2.2. *(1) Se $[f, g] \neq 0$ (cioè le due osservabili non commutano) allora esiste uno stato $v \in \mathcal{S}$ tale che $\delta[f](v)\delta[g](v) \geq \frac{1}{2}[i[f, g]] > 0$*

(2) Se $i[f, g]$ ha spettro strettamente positivo con autovalore minimo $\lambda_- > 0$, allora per ogni stato v, $\delta[f](v)\delta[g](v) \geq \frac{1}{2}\lambda_-$.

(3) Se v è un autovettore per f allora per ogni altra osservabile g, $\Phi(i[f, g](v), v) = 0$, cioè v e $i[f, g](v)$ sono ortogonali.

Dimostrazione. Dimostriamo prima il Corollario (assumendo la Proposizione). Sia $v \in \mathcal{S}$ uno stato tale che $|\Phi(i[f, g](v), v)| = [i[f, g]] > 0$ Segue allora dalla Proposizione che lo stato v verifica il punto (1) del Corollario. Anche il punto (2) segue immediatamente prendendo il minimo al variare di v del secondo membro della disuguaglianza della Proposizione. Nelle ipotesi di (3), si hanno le disuguaglianze $0 \geq \frac{1}{2}|\Phi(i[f, g](v), v)| \geq 0$, da cui la tesi.

Dimostriamo adesso la Proposizione. Premettiamo un' osservazione elementare:

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ e per ogni $a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:

$$\frac{1}{2}|z - \overline{z}| \leq |z - a| \ .$$

Stimiamo adesso il prodotto delle due indeterminazioni:

$$\delta[f](v)\delta[g](v) = \| f(v) - \Phi(f(v), v)v \| \| g(v) - \Phi(g(v), v)v \| \geq$$

$$|\Phi(f(v) - \Phi(f(v), v)v, g(v) - \Phi(g(v), v)v)| =$$

$$|\Phi(f(v), g(v)) - \Phi(f(v), v)\Phi(g(v), v)| \ .$$

Osserviamo che $a = \Phi(f(v), v)\Phi(g(v), v) \in \mathbb{R}$ (in quanto prodotto di due numeri reali), e applichiamo l'osservazione elementare dell'inizio a $z = \Phi(f(v), g(v))$, ed a. Ne segue infine che

$$\delta[f](v)\delta[g](v) \geq \frac{1}{2}|\Phi(f(v), g(v)) - \Phi(g(v), f(v))| = \frac{1}{2}|\Phi([f, g](v), v)|$$

come voluto.

□

3. Operatori normali reali

Il lettore avrà già sicuramente incontrato il teorema spettrale reale TSR, almeno nella versione matriciale per cui ogni matrice simmetrica reale A è simile ad una matrice diagonale D, per mezzo di qualche matrice ortogonale P: $D = P^{-1}AP$, $P^{-1} = P^t$. Ricorderà che, almeno seguendo una delle dimostrazioni correnti del TSR (vedi sotto l'osservazione 3.2), un passaggio importante era la verifica preliminare del fatto (necessario affinchè A sia diagonalizzabile) che ogni matrice simmetrica reale ha il polinomio caratteristico $p_A(t)$ completamente fattorizzabile in $\mathbb{R}[t]$, e che questa verifica comportava una qualche opportuna "complessificazione" della situazione. In questa sezione vogliamo rivisitare quella costruzione alla luce del TSH; oltre a ridimostrare il TSR, otterremo per questa via la caratterizzazione completa degli *operatori normali reali.*

Precisiamo il contesto, che è in senso stretto la versione reale di quanto richiamato all'inizio della nota nel caso complesso. Sia allora $(V_\mathbb{R}, \Phi_\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\dim_\mathbb{R} V_\mathbb{R} = n$, munito del prodotto scalare $\Phi_\mathbb{R}$ *definito* > 0.

Ogni sottospazio W di $V_\mathbb{R}$ sarà munito del prodotto scalare ristretto che sarà anch'esso definito positivo. Se W è un sottospazio di V, la scrittura $W = W_1 \perp \cdots \perp W_k$ avrà un significato del tutto analogo a quanto precisato all'inizio nel caso Hermitiano.

Dato un operatore $f : V_\mathbb{R} \to V_\mathbb{R}$, l'operatore *aggiunto* f^* di f rispetto a $\Phi_\mathbb{R}$ è caratterizzato dalla proprietà che per ogni $v, w \in V_\mathbb{R}$:

$$\Phi_\mathbb{R}(f^*(v), w) = \Phi_\mathbb{R}(v, f(w)) \ .$$

In un sistema di coordinate su $V_\mathbb{R}$ relativo ad una qualsiasi base ortonormale per $\Phi_\mathbb{R}$, se la matrice reale A rappresenta f e la matrice reale A^* rappresenta f^*, allora $A^* = A^t$.

Il *gruppo ortogonale* $(V_\mathbb{R}, \Phi_\mathbb{R}))$, $O(\Phi_\mathbb{R})$ è definito formalmente come il gruppo unitario $U(\Phi)$. In un sistema di coordinate relativo ad una qualsiasi base ortonormale per $\Phi_\mathbb{R}$, se l'operatore invertibile f è rappresentato dalla matrice P, allora f appartiene a $O(\Phi_\mathbb{R})$ se e solo se P appartiene al *gruppo ortogonale classico* $\mathrm{O(n)}$, cioè $P^{-1} = P^t$.

La nozione di *operatore normale reale* f di $(V_\mathbb{R}, \Phi_\mathbb{R})$ è formalmente la stessa come nel caso Hermitiano: "*f commuta con f^*; in termini matriciali A commuta con A^*.*"

Anche qui si distinguono delle classi importanti di operatori/matrici reali normali : *autoaggiunto/simmetrica* ($f = f^*/\ A = A^t$), *anti-autoaggiunto/anti-simmetrica* ($f = -f^*$; $A = -A^t$); *ortogonali/ortogonale* ($f^{-1} = f^*$; $A^{-1} = A^t$).

Il TSR riguarda gli operatori reali autoaggiunti, ma ci possiamo chiedere più in generale se gli endomorfismi reali normali ammettano qualche forma matriciale normale, in qualche sistema di coordinate relativo ad una opportuna base ortonormale.

3.1. **Complessificazione.** Poiché l'idea è quella di sfruttare il TSH, occorre indicare un modo sistematico di complessificare la situazione. Il prototipo della complessificazione è proprio l'estensione dei campi $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, che verrà ricalcata in generale. Lo spazio complessificato $V = V_\mathbb{C}$ di $V_\mathbb{R}$ ha come insieme di definizione il prodotto $V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R}$ ma converrà codificare il generico elemento $(v, w) \in V_\mathbb{R} \times V_\mathbb{R}$ nella forma $(v, w) \leftrightarrow v + iw$, dove v (w) sarà detto la parte reale (immaginaria) del vettore. Con questa notazione, la struttura di $\mathbb{C}$-spazio $(V, +, \cdot)$, definita usando quella reale $(V_\mathbb{R}, +, \cdot)$, è specificata come segue:

$$(v + iw) + (u + ir) := (v + u) + i(w + r) \ ,$$

per ogni scalare $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$z(v + iw) := (xv - yw) + i(yv + xw) \ .$$

$V_{\mathbb{R}}$ viene considerato come un sottoinsieme di V (in effetti come sottospazio vettoriale reale), mediante l'identificazione $v \leftrightarrow v + i0$. L'applicazione $V \to V$ definita da $\overline{v + iw} := v + i(-w)$ (ma useremo spesso l'abuso di notazione indolore $\overline{v + iw} := v - iw$) estende su V la classica *coniugazione complessa* su $\mathbb{C}$, e risulta che un vettore v di V è *reale*, cioè appartiene a $V_{\mathbb{R}}$, se e solo se $v = \overline{v}$.

Se $\mathcal{B}$ è una base di $V_{\mathbb{R}}$, è facile verificare che $\mathcal{B}$ è anche una base (detta una *base reale*) di V (per cui $\dim_{\mathbb{C}} V = \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{R}}$). Passando alle coordinate rispetto ad una qualsiasi base reale di V, l'inclusione $V_{\mathbb{R}} \subset V$ corrisponde all'inclusione standard $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$.

Se $f_{\mathbb{R}}$ è un endomorfismo di $V_{\mathbb{R}}$, il complessificato $f : V \to V$ è definito come $f(v + iw) = f_{\mathbb{R}}(v) + if_{\mathbb{R}}(w)$. Chiaramente f si restringe a $f_{\mathbb{R}}$ su $V_{\mathbb{R}}$. Se $\mathcal{B}$ è una base reale di V, $A_{\mathbb{R}}$ è la matrice reale che rappresenta $f_{\mathbb{R}}$, A è la matrice complessa che rappresenta f, allora $A = A_{\mathbb{R}}$. In particolare questo implica che $f_{\mathbb{R}}$ e f hanno lo stesso polinomio caratteristico e questo è un polinomio reale (in $\mathbb{R}[t]$).

Sia adesso come sopra $\Phi_{\mathbb{R}}$ un prodotto scalare definito positivo su $V_{\mathbb{R}}$. Definiamo

$$\Phi(v + iw, u + ir) = (\Phi_{\mathbb{R}}(v, u) + \Phi_{\mathbb{R}}(w, r)) + i(\Phi_{\mathbb{R}}(w, u) - \Phi_{\mathbb{R}}(v, r)) \in \mathbb{C}$$

Si verifica che Φ è un prodotto Hermitiano definito positivo su V che si restringe a $\Phi_{\mathbb{R}}$ su $V_{\mathbb{R}}$. Φ è detto il *complessificato Hermitiano di* $\Phi_{\mathbb{R}}$. Se $\mathcal{B}$ è una base ortonormale di $V_{\mathbb{R}}$ rispetto a $\Phi_{\mathbb{R}}$, allora $\mathcal{B}$ è anche una base *unitaria reale* di V rispetto a Φ. Se $f_{\mathbb{R}}$ è un operatore normale di $(V_{\mathbb{R}}, \Phi_{\mathbb{R}})$ allora il suo complessificato è un operatore normale (reale) di (V, Φ); inoltre quanto appena detto si specializza alle classi degli operatori autoaggiunti, anti-autoaggiunti, ortogonali reali. L'applicazione $O(\Phi_{\mathbb{R}}) \to U(\Phi)$, $f_{\mathbb{R}} \to f$ è un omomorfismo iniettivo di gruppi, per cui il primo è identificato con un sottogruppo del secondo; in un sistema di coordinate rispetto ad una qualsiasi base unitaria reale di (V, Φ), questo corrisponde alla inclusione dei gruppi classici $O(n) \subset U(n)$.

3.2. **TSR.** Una prima conseguenza immediata della precedente discussione e il risultato sul polinomio caratteristico degli endomorfisni autoaggiunti reali (cioè delle matrici simmetriche reali) a cui alludevamo all'inizio di questa sezione.

Lemma 3.1. *Il polinomio caratteristico $p_{f_{\mathbb{R}}}(t) \in \mathbb{R}[t]$ di un operatore autoaggiunto rispetto a $\Phi_{\mathbb{R}}$ è completamente fattorizzabile su $\mathbb{R}$.*

Infatti $f_{\mathbb{R}}$ e il suo complessificato f hanno lo stesso polinomio caratteristico, f è autoaggiunto rispetto al prodotto Hermitiano Φ, e sappiamo che questi operatori hanno spettro reale.

Ripercorriamo adesso la dimostrazione di TSH specializzandola al caso degli operatori autoaggiunti (rispetto a Φ). In questo caso il Lemma 1.5 è banale e l'induzione della dimostrazione si semplifica nel senso che evidentemente (poiché $f = f^*$) basta osservare che se v è un autovettore di f di autovalore (necessariamente reale) λ, allora lo spazio ortogonale a v, Z_v, è f-invariante, e che la restrizione $f|Z_v$ è autoaggiunta rispetto a $\Phi|Z_v$. Se f è il complessificato dell'operatore $f_{\mathbb{R}}$ autoaggiunto rispetto a $\Phi_{\mathbb{R}}$, allora possiamo raffinare l'induzione prendendo v nella parte reale $V_{\mathbb{R}}$ e osservare che $(Z_v, \Phi|Z_v, f|Z_v)$ è il complessificato di $(Z_{v,\mathbb{R}}, \Phi_{\mathbb{R}}|Z_{v,\mathbb{R}}, f_{\mathbb{R}}|Z_{v,\mathbb{R}})$. Concludendo infine con la costruzione di una base ortonormale di autovettori di $f_{\mathbb{R}}$, che tra l'altro è anche una base unitaria reale di autovettori di f. Dimendicando tutta la complessificazione, e ritenendo solo la traccia reale di quanto fatto, abbiamo ridimostrato il TSR.

Osservazioni 3.2. In effetti, per far marciare l'induzione della dimostrazione del TSR, non è strettamente necessario disporre preliminarmente del Lemma 3.1. E' sufficiente dimostrare a priori che ogni operatore autoaggiunto reale (cioè ogni matrice reale simmetrica A) ammette almeno un autovalore λ, e quindi un autovettore v reali. Per fare questo si può usare il seguente argomento puramente reale: si consideri la funzione $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da : $X \to X^tAX$. Poiché la sfera unitaria $S^{n-1} = \{X \in \mathbb{R}^n | X^tIX = 1\}$ è compatta, esistono sicuramente punti $v_\pm$ di massimo e minimo assoluto di $F|S^{n-1}$. Il lettore può dimostrare per esercizio che questi vettori $v_\pm$ sono autovettori per A. Il meccanismo della complessificazione manifesta quindi pienamente la sua utilità nel trattamento di *tutti* gli operatori normali reali.

3.3. **Forme normali per gli operatori normali reali.** Poichè $\mathbb{C}$ estende $\mathbb{R}$ ha senso cercare le radici complesse di ogni polinomio a coefficienti reali $p(t) \in R[t] \subset \mathbb{C}[t]$. E' un fatto ben noto che $p(\alpha) = 0$, per qualche $\alpha = |\alpha|e^{i\theta} \neq \overline{\alpha} \in C$, con molteplicità m, se e solo se $p(\overline{\alpha}) = 0$ con la stessa molteplicità. Inoltre il prodotto dei due fattori irriducibili lineari complessi $(t-\alpha)(t-\overline{\alpha})$ produce il fattore irriducibile di $p(t)$ reale di grado 2, $t^2 - 2|\alpha|\cos(\theta) + |\alpha|^2$.

Sia $f_\mathbb{R}$ un operatore normale di $(V_\mathbb{R}, \Phi_\mathbb{R})$ con complessificato f normale per (V, Φ). Lo spettro di f può eventualmente contenere qualche autovalore reale λ di molteplicità m_λ, e coppie di autovalori non reali $(\alpha, \overline{\alpha})$, entrambi di molteplicità m_α, come sopra. Per il TSH, sappiamo che f è unitariamente diagonalizzabile, cioè V è somma diretta/ortogonale di addendi della forma $V_\lambda(f)$ oppure $V_\alpha(f) \perp V_{\overline{\alpha}}(f)$. Inoltre ogni $f|V_\lambda(f)$ è autoaggiunto (rispetto a $\Phi|V_\lambda(f)$). E' facile verificare che ogni $V_\lambda(f)$ è il complessificato di $V_\lambda(f_\mathbb{R})$ e che $f|V_\lambda(f)$ è il complessificato di $f_\mathbb{R}|V_\lambda(f_\mathbb{R})$. Queste restrizioni rientrano allora nel quadro del TSR e possiamo trovare basi unitarie reali per $\Phi|V_\lambda(f)$. Concentriamoci adesso sugli addendi della forma $V_\alpha(f) \perp V_{\overline{\alpha}}(f)$. Sappiamo che entrambi i sotto–addendi hanno dimensione (complessa) uguale a m_α, e si verifica senza difficoltà che $V_\alpha(f) \perp V_{\overline{\alpha}}(f)$ è il complessificato di $\ker(f_\mathbb{R}^2 - 2|\alpha|\cos(\theta)f + |\alpha|^2 f^0)$, così come la restrizione di f è il complessificato della restrizione di $f_\mathbb{R}$. L'osservazione chiave (che ancora una volta il lettore potrà verificare per esercizio senza difficoltà) è che poiché f è il complessificato di $f_\mathbb{R}$, allora vale

$$V_{\overline{\alpha}}(f) = \overline{V_\alpha(f)}\ .$$

Ne segue che se $\mathcal{D} = \{d_1, \dots, d_{m_\alpha}\}$ è una base unitaria di $V_\alpha(f)$, allora $\overline{\mathcal{D}} = \{\overline{d}_1, \dots, \overline{d}_{m_\alpha}\}$ è una base unitaria di $V_{\overline{\alpha}}(f)$; infine, siccome i due spazi sono tra loro ortogonali, l'unione di queste due basi $\mathcal{D} \cup \overline{\mathcal{D}}$ è una base unitaria di $V_\alpha(f) \perp V_{\overline{\alpha}}(f)$. Decomponiamo ulteriormente $V_\alpha(f) \perp V_{\overline{\alpha}}(f)$ nella somma diretta/ortogonale dei sottospazi 2-dimensionali $W(d_j, \overline{d}_j)$, muniti della base unitaria $\{d_j, \overline{d}_j\}$, $j = 1, \dots, m_\alpha$. Prendiamo adesso le *parti reale e immaginaria normalizzate* di d_j:

$$d_j^\mathbb{R} = \frac{d_j + \overline{d}_j}{\sqrt{2}},\ d_j^I = \frac{-i(d_j - \overline{d}_j)}{\sqrt{2}}\ .$$

Si tratta di un cambiamento di base unitario, infatti è immediato verificare che la matrice di combiamento di base P appartiene a $U(2)$, dove

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}i}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}i}{2} \end{bmatrix}$$

così che infine $(d_j^\mathbb{R}, d_j^I)$ è una *base unitaria reale* di $W(d_j, \overline{\mathrm{d}}_j)$. Possiamo riassumere i risultati di questa discussione nel seguente Teorema

Teorema 3.1. (Forma normale.) *Sia $(V_\mathbb{R}, \Phi_\mathbb{R})$ uno spazio vettoriale reale, $dimV = n$, munito di un prodotto scalare definito positivo $\Phi_\mathbb{R}$. Sia $f_\mathbb{R}$ un operatore su V con polinomio caratteristico avente la seguente fattorizzazione su $\mathbb{C}$:*

$$P_{f_\mathbb{R}}(t) = \pm\Big(\prod_{r=1}^{k}(t-\lambda_r)^{m_r}\Big)\Big(\prod_{s=1}^{h}(t-\alpha_s)^{n_s}(t-\overline{\alpha}_s)^{n_s}\Big)$$

dove $n = \sum m_r + 2\sum n_s$, $\lambda_r = \overline{\lambda}_r$, $\alpha_s \neq \overline{\alpha}_s$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ o $\alpha_i \neq \alpha_j$ se $i \neq j$. Allora $f_{\mathbb{R}}$ è normale se e solo se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ per $\Phi_{\mathbb{R}}$ (quindi unitaria reale per il complessificato Hermitiano Φ) tale che la matrice A che rappresenta f in quella base è diagonale a blocchi, con m blocchi 1×1 uguali a λ, per ogni autovalore reale λ di molteplicità m, e n blocchi 2×2 della forma

$$\begin{bmatrix} |\alpha|\cos(\theta) & -|\alpha|\sin(\theta) \\ |\alpha|\sin(\theta) & |\alpha|\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

per ogni autovalore complesso $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$, di molteplicità n. Tale forma normale matriciale è unica a meno di permutazione dei blocchi.

Osservazioni 3.3. (1) Il Teorema appena dimostrato ha un trasparente significato geometrico: $f_{\mathbb{R}}$ invertibile è normale se e solo se esiste una decomposizione in somma diretta/ortogonale di $(V_{\mathbb{R}}, \Phi_{\mathbb{R}})$ per mezzo di sottospazi $f_{\mathbb{R}}$-invarianti rispettivamente 1 e 2-dimensionali; inoltre la restrizione di $f_{\mathbb{R}}$ a quelli 1-dimensionali agisce geometricamente o come una omotetia ($\lambda > 0$) o come come la composizione di una omotetia e della riflessione $v \to -v$; la restrizione di $f_{\mathbb{R}}$ ai sottospazi invarianti 2-dimensionali agisce geometricamente come una similitudine “positiva” (cioè la composizione di una rotazione e di una omotetia - si noti che il determinante di questa trasformazione è positivo).

(2) $f_{\mathbb{R}}$ è ortogonale se e solo se è normale ed inoltre gli autovalori reali sono uguali a ± 1, mentre quelli complessi sono unitari ($\alpha = e^{i\theta}$) e $f_{\mathbb{R}}$ agisce sui corrispondenti spazi invarianti 2-dimensionali come una rotazione.

(3) $f_{\mathbb{R}}$ è anti-autoaggiunto se e solo se è normale, e la forma normale presenta solo sottospazi invarianti 2-dimensionali con corrispondente matrice del tipo seguente, per qualche $a > 0$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}$$