Analisi I - IngBM - 2015-16
COMPITO A 27 luglio 2016

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA....................... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*
Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Esercizio 0. (0 punti) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1.(3,5 punti) Sia a_n la successione definita da

$$a_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx$$

Dire se esiste $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ e se esiste calcolarlo.

SOLUZIONE.

☐ NO il limite non esiste ☒ SI il limite esiste e vale 0

perché per la successione a_n si ha

$$a_n = \int_n^{n+1} e^{-x} dx = [-e^{-x}]_n^{n+1} = -e^{-(n+1)} + e^{-n} = e^{-n}\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

e quindi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n}\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 0.$

Esercizio 2.(3,5 punti) Sia A un insieme con 3 elementi e B un insieme con 5 elementi.

(1) Calcolare il numero delle applicazioni iniettive tra A e B.
(2) Calcolare il numero delle applicazioni iniettive tra B e A.

SOLUZIONE.

(1) Il numero delle applicazioni iniettive tra A e B è $\boxed{60}$
(2) Il numero delle applicazioni iniettive tra B e A è $\boxed{0}$

perché

(1) vi sono molti modi per calcolare tale numero; uno di questi è osservare che ci sono 5 modi diversi di scegliere un elemento in B ove inviare il primo elemento di A e che, operata tale scelta, dovendo essere l'applicazione iniettiva restano 4 modi per scegliere dove inviare il secondo elemento di A e per lo stesso motivo alla fine restano 3 scelte per inviare il terzo. In totale 5x4x3=60 possibilità.
(2) una applicazione da un insieme B con 5 elementi in uno A con 3 elementi non può mai essere iniettiva.

Esercizio 3.(3 punti)
Descrivere il più grande sottoinsieme D della retta reale $\mathbf{R}$ ove la formula

$$f(x) = \sqrt{\log|\sin(x)|}$$

definisce una funzione $f : D \to \mathbf{R}$.
Descrivere il sottoinsieme B di $\mathbf{R}$ immagine della funzione f.

SOLUZIONE.
$D = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}_{k\in\mathbf{Z}}$
$B = \{0\}$
perché al fine di determinare D basta osservare che nel campo reale la radice quadrata è definita per un numero positivo o nullo, pertanto dovrà essere $\log|\sin(x)| \geq 0$ e quindi, essendo $|\sin(x)| \leq 1$ si dovrà avere $|\sin(x)| = 1$ da cui il risultato.
Al fine di determinare l'immagine B, si osservi che nei punti di D si ha $\log|\sin(x)| = 0$ e quindi $B = \{0\}$.

Seconda parte.
Esercizio 1. (6 punti)

Si consideri la funzione definita dalla formula $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} & \text{se } x \leq -2 \\ e^3 + 4 - x^2 & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ e^{x+1} & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

(1) Descrivere l'insieme C dei punti di $\mathbf{R}$ dove la funzione è continua e l'insieme D dei punti dove la funzione è derivabile
(2) Descrivere l'insieme dei punti di massimo e minimo relativi e assoluti della funzione $f(x)$
(3) Descrivere gli eventuali asintoti.

SOLUZIONE.

(1) $C = \mathbf{R}$

$D = \mathbf{R} \setminus \{-2, 2\}$

perché la funzione è ottenuta tramite procedure che conservano la continuità da funzioni elementari su intervalli la cui unione è tutto $\mathbf{R}$, e sull'intersezione di due di questi intervalli le funzioni si raccordano. La funzione pertanto risulta continua su tutto $\mathbf{R}$.
Per l'insieme D ove esiste finito il limite del rapporto incrementale valgono considerazioni analoghe tranne nei pumti -2 e 2 dove tale limite non esiste.

(2) *Massimi assoluti.* Non ci sono in quanto la funzione per $x \to \pm\infty$ tende a $+\infty$
Massimi locali. Il punto 0 è un punto di massimo locale. Essendo tale punto in un intervallo ove la funzione è derivabile, possiamo usare gli strumenti del calcolo differenziale e dedurlo quindi dal fatto che in tale punto la derivata prima si annulla e la derivata seconda è negativa.
Minimi assoluti. La funzione nei punti -2 e 2 ha due minimi assoluti in quanto è facile verificare che $f(x) \geq e^3$ per ogni $x \in \mathbf{R}$. Infatti per $x < -2$ il segno della derivata ci dice che la funzione è sempre decrescente e quindi $f(x) > f(-2)$, per $-2 < x < 0$ la funzione è crescente e quindi $f(-2) < f(x)$. Analoghe considerazioni valgono per $x > 0$. Per concludere si osservi che $f(-2) = f(2)$.
Minimi locali. i due punti -2 e 2 sono due punti di minimo locale. Pur non essendo la funzione in tali punti derivabile, l'esame della crescenza della funzione in un intorno dei due punti, fatta con l'aiuto della derivata in un intorno di tali punti, porta a concludere, come osservato nel punto precedente che i due punti sono due punti di minimo locale.

(3) *Asintoti.* Il grafico della funzione non presenta asintoti.
Infatti, non essendoci asintoti verticali ed essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \infty$,per escludere la presenza anche di asintoti obliqui basta osservare che il limite $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ non è finito.

Esercizio 2.(6 punti)
Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione continua tale che $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$. Provare che f non può essere iniettiva.

SOLUZIONE.
Sia $\overline{x}$ un punto di $\mathbf{R}$ e $\overline{y} = f(\overline{x})$. Il fatto che funzione tenda a $+\infty$ sia per $x \to +\infty$ che per $x \to -\infty$ implica che esiste un punto x_1 a sinistra di $\overline{x}$ con $y_1 = f(x_1) > \overline{y}$ e un punto x_2 a destra di $\overline{x}$ con $y_2 = f(x_2) > \overline{y}$.
Se $y_1 = y_2$ abbiamo finito. Supponiamo quindi $y_1 \neq y_2$ e per esempio $y_1 < y_2$: il teorema dei valori intermedi ci assicura l'esistenza di un punto $\widetilde{x} \in [\overline{x}, x_2]$ tale che $f(\widetilde{x}) = y_1 = f(x_1)$. Se $y_1 > y_2$ il ragionamento è analogo.

Esercizio 3.(6 punti)
Trovare le soluzioni in campo complesso dell'equazione

$$e^z = e^{-\overline{z}}$$

SOLUZIONE.
L'insieme delle soluzioni è l'insieme dei numeri complessi puramente immaginari, cioè del tipo e^{ib}

Che questi numeri siano soluzioni è di immediata verifica perchè $e^{ib} = e^{-\overline{ib}} = e^{-(-ib)}$
Per provare che sono le sole soluzioni possiamo utilizzare la formula di Eulero e scrivere, posto $z = a + ib$, $e^z = e^{a+ib} = e^a(\cos b + i\sin b)$ e $e^{-\overline{z}} = e^{-(a-ib)} = e^{-a+ib} = e^{-a}(\cos b + i\sin b)$ per cui l'equazione proposta diventa

$$e^a(\cos b + i\sin b) = e^{-a}(\cos b + i\sin b)$$

che ammette come soluzione tutte le coppie (a, b) del tipo $(0, b)$.
Si sarebbe potuti pervenire alla stessa conclusione osservando che da $e^z = e^{-\overline{z}}$ si ricava $e^z e^{\overline{z}} = e^{z+\overline{z}} = 1$ cosa che implica che la parte reale di z debba essere 0.

Esercizio 4.(6 punti)
Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 8y = e^{3t}$$

che verifica $y(0) = y'(0) = 1$

SOLUZIONE.
L'equazione caratteristica ha come radici 2 e 4, per cui la soluzione generale dell'equazione omogenea è $C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$.
Per avere una soluzione particolare dell'equazione non omogenea, possiamo usare gli argomenti esposti nella dispensa EQUADIFF2 pag 11: non essendo la funzione e^{3t} soluzione della equazione omogenea possiamo quindi cercare una soluzione del tipo ae^{3t}. Facendo i calcoli si ottiene per a il valore -1. Quindi la soluzione generale è $C_1e^{2t} + C_2e^{4t} - e^{3t}$.
Imponendo infine le condizioni iniziali si ottiene per le costanti i valori $C_1 = 2$ e $C_2 = 0$ e quindi la funzione $2e^{2t} - e^{3t}$.