**Analisi I - IngBM - 2015-16**
**COMPITO B 6 luglio 2016**

COGNOME ........................ NOME ............................

MATRICOLA........................ VALUTAZIONE ..... + ..... = ......

## 1. Istruzioni

*Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo;* **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.
**Attenzione.** Tutte le risposte devono essere giustificate.

**Esercizio 0. (0 punti)** Leggere e capire le istruzioni.

**Esercizio 1.(3,5 punti)** Calcolare, se esiste, il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}}$$

SOLUZIONE.

☐ NO il limite non esiste ☒ SI il limite esiste e vale $e$

perché $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^n}{n!}}\right)^{\frac{n^n}{n!}}$ e poiché $\lim_{n\to+\infty}\frac{n^n}{n!} = +\infty$(cfr. dispensa LIMSUCC pag. 4) si ha (cfr. dispensa LIMSUCC pag.9)

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)^{\frac{n^n}{n!}} = e$$

**Esercizio 2.(3 punti)** Si consideri la funzione $g(t) = |t-2| - |t-1|$
Si chiede di descrivere

(1) Il sottoinsieme $D$ di $\mathbf{R}$ dove $g(t)$ è derivabile
(2) Il sottoinsieme $E$ di $\mathbf{R}$ dove la funzione integrale $f(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ è derivabile.

SOLUZIONE.

(1) $D = \mathbf{R} \setminus \{1,2\}$
perché in tutti i punti diversi da 1 e 2 la funzione è una funzione elementare del tipo $at+b$ e in quei due punti non esiste il limite del rapporto incrementale poiché il limite destro è diverso da quello sinistro. In particolare la funzione può essere descritta anche come

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t \leq 1 \\ 3-2t & \text{per } 1 \leq t \leq 2 \\ -1 & \text{per } 2 \leq t \end{cases}$$

e questo permette facilmente di vedere che nel punto 1 il limite sinistro del rapporto incrementale è $0$ e quello destro $-2$ e nel punto 2 i due limiti valgono rispettivamente $-2$ e $0$.

(2) $E = \mathbf{R}$
perché la funzione $g(t)$ è in ogni punto la derivata della funzione $f(x)$.

**Esercizio 3.(3,5 punti)** Provare per induzione che se $n$ è un numero naturale allora $2+n+n^2$ è pari.

SOLUZIONE. Per $n=0$ o $1$ la cosa è evidente. Supponiamo ora che la proposizione sia vera per $n$ e mostriamo che ció implica che è vera per $n+1$.
Osserviamo che $2+(n+1)+(n+1)^2 = 2+n+n^2+2n+2$. Ma $2+n+n^2$ è pari per ipotesi induttiva e quindi $2+n+n^2+2n+2$ è pari essendo somma di un pari $(2+n+n^2)$ e di un altro pari $(2(n+1))$.

**Seconda parte**
**Esercizio 1.(6 punti)**
Sia $g(t)$ una funzione continua da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$. Si consideri la funzione integrale

$$f(x) = \int_0^x \log(g^2(t) + 1)dt$$

(1) Dimostrare che la funzione $f(x)$ è iniettiva.
(2) Detta $B$ l'immagine della funzione $f$, dimostrare che esiste una funzione $\Phi : B \to \mathbf{R}$ tale che $\Phi \circ f = id$.
(3) Dimostrare che la $\Phi$ è differenziabile.

SOLUZIONE.

(1) La funzione $f(x)$ è una funzione la cui derivata è una funzione positiva tranne il caso in cui $g(t) = 0$. Quindi se $g(t)$ non si annulla in nessun intervallo aperto, $f(x)$ è una funzione monotona $f(x)$ crescente e pertanto è iniettiva. Se invece $g(t)$ si annulla su qualche intervallo aperto $f(x)$ in tale intervallo è costante e quindi non è iniettiva.
(2) Sotto l'ipotesi che $f$ sia iniettiva risulta biunivoca sull'immagine $B$ e pertanto invertibile. Basta osservare che per ogni $b \in B$ esiste allora un solo $a \in \mathbf{R}$ tale che $f(a) = b$ e porre $\Phi(b) = a$.
(3) La funzione $\Phi$ è differenziabile nei punti ove la derivata della funzione $f(x)$ non si annulla cioè nei punti ove $g(t) \neq 0$.

**Esercizio 2.(6 punti)** Siano $m, n$ due interi non nulli fissati e al variare delle costanti A, B arbitrarie sia $f_{A,B}$ la funzione

$$f_{A,B} = (A \sin nx + B \cos nx)e^{mx}.$$

(1) Dire se si possono scegliere $A$ e $B$ in modo tale che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva della funzione $e^{mx} \cos nx$

(2) Siano $\alpha$ e $\beta$ due numeri reali fissati. Dire sotto quali condizioni esistono $A$ e $B$ in modo tale che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva della funzione $e^{mx}(\alpha \sin nx + \beta \cos nx)$.

SOLUZIONE.

(1) Richiedere che la funzione $f_{A,B}$ sia la primitiva di $e^{mx} \sin nx$ equivale a richiedere che $\frac{d}{dx} f_{A,B} = e^{mx} \cos nx$. Eseguendo i calcoli si ha

$$\frac{d}{dx} f_{A,B} = ((mA - nB) \sin nx + (nA + mB) \cos nx)e^{mx}$$

e imponendo che questa sia $e^{mx} \cos nx$ otteniamo

$$\begin{cases} mA - nB = 0 \\ nA + mB = 1 \end{cases}$$

Tale sistema, poiché $m^2 + n^2 \neq 0$ ha soluzione $A = \dfrac{n}{m^2 + n^2}, B = \dfrac{m}{m^2 + n^2}$

(2) Ragionando come al punto precedente si perviene al sistema

$$\begin{cases} mA - nB = \alpha \\ nA + mB = \beta \end{cases}$$

che, essendo il suo determinante $\neq 0$ ha soluzione

$$A = \frac{m\alpha + n\beta}{m^2 + n^2}, B = \frac{-n\alpha + m\beta}{m^2 + n^2}$$

**Esercizio 3.(6 punti)**
Descrivere l'insieme delle soluzioni dell'equazione

$$e^{|z|^2 - z^2} = i$$

SOLUZIONE.
L'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto. Ponendo $z = a + ib$ otteniamo che $|z|^2 - z^2 = a^2 + b^2 - (a^2 - b^2 + 2abi) = 2b^2 - 2abi$. Pertanto

$$e^{|z|^2 - z^2} = e^{2b^2}(\cos(-2ab) + i\sin(-2ab)) = i.$$

Il fatto che $i$ ha modulo $1$, implica che $b = 0$ e quindi che il numero complesso $e^{|z|^2 - z^2}$ è del tipo $1 + i0$. Pertanto l'equazione proposta non ha soluzioni.
**Esercizio 4.(6 punti)**
Trovare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 6y' + 8y = \sin 3t$$

che verifica $y(0) = 1$
SOLUZIONE.
Si vede immediatamente che l'equazione caratteristica ha soluzioni $2$ e $4$, pertanto la soluzione generale dell'equazione omogenea è del tipo $C_1e^{2t} + C_2e^{4t}$.
Cerchiamo una soluzione particolare del tipo $a\sin 3t + b\cos 3t$. Otteniamo

$$(-a + 18b)\sin 3t + (18a - b)\cos 3t = \sin 3t$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} -a + 18b & = 1 \\ 18a - b & = 0 \end{cases}$$

che ha la soluzione $a = \dfrac{1}{323}, b = \dfrac{18}{323}$
Quindi la soluzione generale è del tipo

$$C_1e^{2t} + C_2e^{4t} + \frac{1}{323}\sin 3t + \frac{18}{323}\cos 3t.$$

Imponendo la condizione richiesta otteniamo

$$C_1 + C_2 = \frac{305}{323}.$$

Quindi le soluzioni del problema proposto sono tutte le funzioni del tipo

$$Ce^{2t} + (\frac{305}{323} - C)e^{4t} + \frac{1}{323}\sin 3t + \frac{18}{323}\cos 3t$$

al variare della costante reale $C$.