APPUNTI DI GEOMETRIA AFFINE

R. BENEDETTI

Richiamiamo alcune nozioni generali sui gruppi di trasformazioni che saranno utili in seguito. Dato un insieme $X \neq \emptyset$, $S(X)$ indica il gruppo totale di tutte le trasformazioni (a volte dette anche le "simmetrie") di X, cioè il gruppo di tutte le applicazioni $f : X \to X$ biunivoche, dove l'operazione di gruppo è data dalla composizione. Un *gruppo di trasformazioni* di X è un sottogruppo di $S(X)$. Se F è un sottoinsieme di $S(X)$, allora il *gruppo di trasformazioni generato* da F, indicato con $< F >$, consiste di tutte le trasformazioni di X che si possono scrivere come composizione di un numero finito di elementi di F o di loro inversi. Dato un gruppo G di trasformazioni di X e un elemento $x \in X$, lo *stabilizzatore* di x in G è il sottogruppo di G formato dalle straformazioni che lasciano x fisso: $St_x(G) := \{g \in G;\ g(x) = x\}$. Dato un omomorfismo $\rho : G \to S(X)$, questo determina un' *azione* a_ρ di G su X, mediante $a_\rho(g, x) := \rho(g)(x)$. Per ogni $x \in X$, $[x]_\rho := \{y = \rho(g)(x) \in X;\ g \in G\}$ è detta l' *orbita* dell'elemento x rispetto all'azione a_ρ; le orbite formano una partizione di X e quindi sono le classi di equivalenza per una opportuna relazione di equivalenza su X.

In buona misura l'algebra lineare che abbiamo sviluppato consiste nello studio delle azioni del gruppo lineare $GL(V)$ (o di suoi sottogruppi, per esempio i gruppi ortogonali $O(\Phi)$, o unitari relativi ai prodotti Hermitiani quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) sullo spazio vettoriale V e su altri insiemi o spazi associati a V (per esempio l'insieme dei suoi sottospazi, oppure lo spazio degli endomorfismi di V). Le *traslazioni* che andiamo a introdurre sono trasformazioni dell'insieme V che pur essendo molto semplici e naturali da definire non rientrano nel quadro delle trasformazioni lineari. Sara' quindi opportuno ampliare (in modo "minimale") l'algebra lineare in una teoria che incorpori le traslazioni. E' inteso che le dimostrazioni omesse nella discussione che segue sono lasciate al lettore per esercizio.

Sia $v \in V$. Allora la *traslazione su V secondo v*

$$\tau_v : V \to V$$

è definita da $\tau_v(w) := w + v$, per ogni $w \in V$. Si noti che τ_v è lineare se e solo se $v = 0$. E' chiaro che τ_v è invertibile e che $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$. Inoltre $\tau_{v+w} = \tau_v \circ \tau_w = \tau_w \circ \tau_v$. In altre parole abbiamo dimostrato:

Proposizione 0.1. *L'insieme $Ts(V)$ di tutte le traslazioni è un gruppo commutativo di trasformazioni di V, canonicamente isomorfo a $(V, +)$ via l'isomorfismo $v \to \tau_v$.*

Osservazioni 0.2. Le traslazioni e la necessità di ampliare il quadro dell'algebra lineare erano già comparsi nello studio dell'insieme delle soluzioni dei sistemi lineari non–omogenei. Sia $AX = B$, A matrice $m \times n$ su $\mathbb{K}$, $B \in \mathbb{K}^m$, un tale sistema con il termine noto $B \neq 0$. Sappiamo allora che l'insieme delle soluzioni non è un sottospazio vettoriale di K^n, può essere vuoto (criterio di Rouché-Capelli), se non è vuoto allora è fatto da tutti gli elementi di K^n della forma $X = \tau_{X_0}(Y)$, dove Y varia nel sottospazio vettoriale $\mathrm{Ker}A$, mentre X_0 è una qualsiasi fissata soluzione particolare del sistema non–omogeneo.

1. Il gruppo delle trasformazioni affini di uno spazio vettoriale

Abbiamo dunque individuato due gruppi di trasformazioni dello spazio vettoriale V: $GL(V)$ e $Ts(V)$. Il gruppo $Aff(V)$ delle trasformazioni affini di V è per definizione il gruppo di trasformazioni di V generato dall'unione di questi due sottogruppi. Il seguente Lemma dice che ogni elemento di $Aff(V)$ ammette un'unica determinata espressione normalizzata.

Lemma 1.1. *$Aff(V) = \{\tau_v \circ f;\ v \in V,\ f \in GL(V)\ \}$. In particolare $(\tau_v \circ f)^{-1} = \tau_{-f^{-1}(v)} \circ f^{-1}$. Inoltre l'espressione normalizzata degli elementi di $Aff(V)$ è unica.*

Dimostrazione. La proposizione afferma che ogni composizione finita di trasformazioni lineari o di traslazioni puo' essere scritta in quella forma normalizzata. Un semplice argomento induttivo mostra che basta dimostrare che per ogni f lineare e ogni $v \in V$, allora

$$f \circ \tau_v = \tau_{v'} \circ f'$$

per qualche f' lineare e $v' \in V$. Ma $f \circ \tau_v(w) = f(w+v) = f(w) + f(v)$, per cui basta prendere $f' = f$ e $v' = f(v)$.

$(\tau_v \circ f) \circ (\tau_{v'} \circ f') = 1$, significa che per ogni $w \in V$, $f(f'(w)+v')+v = f(f'(w)) + f(v') + v = w$, da cui necessariamente $v' = -f^{-1}(v)$, $f' = f^{-1}$.

Se $f(w) + v = g(w) + t$ per ogni $w \in V$, allora $g^{-1}(f(w) + (v-t)) = w$, da cui $g^{-1} = f^{-1}$, $v - t = 0$.

□

Il Lemma precedente dice tra l'altro che esiste un'applicazione biunivoca naturale

$$GL(V) \times V \to Aff(V)$$
$$(f, v) \to \tau_v \circ f\ .$$

Dunque l'operazione del gruppo $Aff(V)$, data dalla composizione, può essere rimontata e codificata come un'operazione sul prodotto (insiemistico) dei due gruppi

$$(GL(V) \times V) \times (GL(V) \times V) \to (GL(V) \times V)$$
$$(f, v)(g, w) = (f \circ g, f(w) + v)$$

che viene anche detta un'operazione di *prodotto semi-diretto* (ricordiamo che l'operazione di prodotto diretto è data da $(f, v)(g, w) = (f \circ g, v + w)$).

Se $V = \mathbb{K}^n$ allora $GL(V) \times V = GL(n, \mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$, ed ogni trasformazione affine si esprime nelle coordinate canoniche nella forma

$$X \to PX + D$$

dove $P \in GL(n, \mathbb{K})$ e $D \in \mathbb{K}^n$. Dunque può essere codificata da una tabella della forma $(P|D)$ e la legge di composizione è data da $(P|D)(Q|C) = (PQ|PC + D)$.

2. Spazi affini

In prima approssimazione la *geometria affine* si occupa dell'azione di $Aff(V)$ su V (e su altri insiemi o spazi che saranno associati a V). C'e' una prima fondamentale differenza rispetto all'azione del gruppo lineare $GL(V)$ che può essere espressa per mezzo degli stabilizzatori degli elementi di V.

Lemma 2.1. *(1) Il vettore nullo $0 \in V$ è l'unico vettore tale che $St_0(GL(V)) = GL(V)$. Se $\dim V = n$ e $v \neq 0$, allora $St_v(GL(V))$ è isomorfo a $GL(n-1, \mathbb{K})$ (mentre $GL(V)$ è isomorfo a $GL(n, \mathbb{K})$).*

(2) $Aff(V)$ agisce in modo transitivo su V (cioè dati due punti v e w di V esiste una trasformazione affine g tale che $g(v) = w$; in effetti già il sottogruppo delle traslazioni agisce in modo transitivo). Per ogni elemento x di V, $St_x(Aff(V))$ è isomorfo a $GL(V)$.

Dimostrazione. E' chiaro che $St_0(GL(V)) = GL(V)$. Se $v \neq 0$ allora ogni $g = \lambda \mathrm{id}$, $\lambda \neq 0$, non appartiene a $St_v(GL(V))$. La seconda affermazione del punto (1) si ottiene passando in coordinate rispetto ad una base di V che abbia v come primo elemento.

Dati due punti v e w di V, sia $u = w - v$, così che $\tau_u(v) = w$. Si definisce un isomorfismo naturale $St_w(Aff(V)) \to St_v(Aff(V))$ tale che $f \to \tau_{-u} \circ f \circ \tau_u$. Infine si verifica immediatamente che $\tau_v \circ f \in St_0(Aff(V))$ se e solo se $v = 0$, per cui $St_0(Aff(V)) = GL(V)$. $\square$

Dunque in uno spazio vettoriale V c'è un'*origine privilegiata*, mentre rispetto all'azione di $Aff(V)$ tutti i punti di V sono tra loro "equivalenti". Inoltre invece di un'unica struttura di spazio vettoriale V (con relativa origine), da un punto di vista affine conviene pensare ad una famiglia di copie di V, $\{V_x\}_{x \in V}$, dove ogni copia V_x si "materializza" stipulando che x è l'origine di V_x. Formalizziamo questa idea. Poniamo $A(V) := V$ (come insiemi). Gli elementi di $A(V)$ saranno chiamati *punti*, mentre gli elementi di V saranno detti, come al solito, *vettori*. Definiamo l'applicazione

$$F_V : A(V) \times A(V) \to V$$

$$F_V(P, Q) := \overrightarrow{PQ} := Q - P$$

dove l'ultima differenza (eseguita in V) è ottenuta sfuttando la peculiare situazione per cui i punti di $A(V)$ sono anche vettori di V. Questa applicazione verifica le seguenti proprietà fondamentali (di verifica immediata):

(1) Per ogni punto $P \in A(V)$, $\overrightarrow{PP} = 0 \in V$.
(2) Per ogni $P \in A(V)$, l'applicazione $F_P : A(V) \to V$, $F_P(Q) = \overrightarrow{PQ}$, è biettiva.
(3) *Chiusura del triangolo.* Per ogni terna di punti $P, Q, Z \in A(V)$, $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QZ} + \overrightarrow{ZP} = 0 \in V$.

Tutto questo può essere riformulato come segue. Consideriamo rispettivamente le due proiezioni naturali sul primo fattore: $\pi : A(V) \times A(V) \to A(V)$, $p : A(V) \times V \to A(V)$. Definiamo allora $\hat{F} : A(V) \times A(V) \to A(V) \times V$, $\hat{F}(P, Q) = (P, F_P(Q))$. Vediamo che $\hat{F}$ è bigettiva e commuta con le proiezioni: $\pi = p \circ \hat{F}$; per ogni punto $P \in A(V)$, F_P stabilisce una biezione tra la *fibra di π sopra P*, $A(V)_P := \pi^{-1}(P)$ (che è una copia di $A(V)$) e la fibra $V_P := p^{-1}(P)$ di p sopra P (che è una copia di V), permettendo così di trasferire su $A(V)_P$ la struttura di spazio vettoriale di V (con origine uguale a P). Allora $A(V)_P \sim V_P$ può essere pensato come *lo spazio vettoriale tangente a $A(V)$ (applicato) nel punto $P \in A(V)$.*

Osserviamo che $Aff(V)$ agisce anche su $A(V) \times V$ via: $\tau_v \circ f(P, v) := (\tau_v \circ f(P), f(v))$, ed è facile vedere che anche questa azione è transitiva:

" Il gruppo delle trasformazioni affini $Aff(V)$ agisce transitivamente sulle coppie (P, v) formate da un punto di $A(V)$ e da un vettore tangente a $A(V)$ nel punto P".

Osservazioni 2.2. Se Ω è un sottoinsieme di $A(V)$ (per esempio una regione o una curva di $A(\mathbb{R}^3)$), possiamo restringere $\hat{F}$ a $\pi^{-1}(\Omega)$ che risulta essere in bigezione con $\Omega \times V$ (per esempio $\Omega \times \mathbb{R}^3$). Un *campo di vettori* lungo Ω è dato da una famiglia di coppie $\{P, v(P)\}_{P \in \Omega, v(P) \in V_P}$. Si pensi per esempio al campo delle velocità istantanee lungo una curva parametrizzata in $A(\mathbb{R}^3)$. Considerando ora tutte le strutture e gli spazi che si possono costruire a partire da V (il duale V^*, lo spazio degli endomorfismi, quello dei prodotti scalare, ecc.). Possiamo allora estendere la nozione precedente a quella di campo di funzionali, di endomorfismi, di prodotti scalare ecc. lungo Ω. Questi "campi" sono un ingrediente di primaria importanza nello sviluppo di molte teorie matematiche e anche fisiche.

Questa struttura $(A(V), F_V)$ viene detta *lo spazio affine standard associato allo spazio vettoriale* V.

Le proprietà fondamentali verificate da F_V che abbiamo prima messo in evidenza, possono essere prese come gli *assiomi* della definizione astratta di *spazio affine sullo spazio vettoriale* V *(sul campo* $\mathbb{K}$*)*: si tratta di una coppia (A, F) dove A è un insieme non vuoto, $F : A \times A \to V$, $F(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$, è un'applicazione che verifica le tre proprietà fondamentali elencate sopra (valide nell'esempio standard). Quando diremo che A è uno spazio affine (su V), l'applicazione F sarà sottintesa.

Procedendo in modo parallelo a quanto fatto con l'algebra lineare, vogliamo rapidamente indicare come le varie nozioni e costruzioni note (le combinazioni lineari, i sottospazi, le applicazioni lineari, le basi, le coordinate, ecc.) si possano "sollevare" nel contesto affine. Lavorando con uno spazio affine standard $(A(V), F_V)$, la prova di molte delle affermazioni che faremo puo' ridursi a semplici verifiche algebriche, usando l'esplicita definizione di F_V di cui disponiamo in questo caso. Nel caso generale dovremmo essere in grado di dedurle come conseguenze degli assiomi. D'altra parte, vedremo che anche lavorando con gli spazi standard, elaborando per esempio la nozione di sottospazio, sarà necessario riferirsi alla nozione astratta di spazio affine. La ragione è la seguente: passando da V ad $A(V)$, ampliando il gruppo delle trasformazioni da $GL(V)$ a $Aff(V)$, è stato naturale "dimenticare" lo status particolare del vettore nullo; nonostante questo, il punto speciale O di $A(V)$ continua ad essere identificabile. Un sottospazio affine E di $A(V)$ invece non ammetterà proprio, in alcun modo, un punto che si distingua dagli altri. In altre parole, non c'è alcun modo canonico di interpretare E come un $A(W)$ per qualche sottospazio vettoriale W di V (si ricordi per esempio la discussione sull'insieme delle soluzioni di un sistema lineare non omogeneo, e sul fatto che non c'è modo di distinguere alcuna soluzione particolare speciale del sistema).

L'idea naturale per "sollevare" le nozioni dell'algebra lineare alla geometria affine è la seguente. Fissato un punto base $P_0 \in A$, un qualche oggetto dell'algebra lineare, pertinente allo spazio vettoriale V, può essere "sollevato" per mezzo della biezione F_{P_0}. Dovremo però verificare che il risultato affine non dipende dalla scelta (arbitraria) che abbiamo fatto di P_0.

3. Combinazioni affini di punti

Cominciamo con un semplice Lemma.

Lemma 3.1. *Per ogni coppia di punti* (P, Q) *dello spazio affine* A *(su* V*),* $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$.

Dimostrazione. In uno spazio standard chiaramente vale l'identità algebrica $Q - P = -(P - Q)$. Astrattamente, applichiamo la proprietà del triangolo e il primo assioma alla terna di punti P, Q, Q. Allora $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PQ} + 0 + \overrightarrow{QP} = 0$, da cui la tesi. □

Per ogni punto $P \in A$ ed ogni vettore $v \in V$, la *notazione*

$$P + v$$

sta ad indicare l'unico punto Q di A tale che $v = \overrightarrow{PQ}$. Vale:

Lemma 3.2. *Per ogni punto* P *di* A *e per ogni coppia* v, w *di vettori di* V*, si ha* $(P+v)+w = P + (v + w)$.

Dimostrazione. Si noti che l'enunciato del Lemma contiene un abuso di notazione. Tre dei $+$ si riferiscono alla notazione sopra definita, mentre l'ultimo $+$ tra parentesi si riferisce alla somma in V. Allora, in uno spazio standard $A(V)$ questa relazione è una conseguenza algebrica della proprietà associativa di $(V, +)$. In generale, posto $P_1 = P + v = P + \overrightarrow{PP_1}$,

$P_2 = P_1 + w = P_1 + \overrightarrow{P_1P_2}$, applicando il triangolo alla terna di punti P, P_1, P_2, si verifica che $P + (\overrightarrow{PP_1} + \overrightarrow{P_1P_2}) = P + \overrightarrow{PP_2} = P_2$.

□

Vogliamo "sollevare" su A la nozione di combinazione lineare di vettori di V. Formalizziamo la procedura. Dato un insieme finito X, sia data un'applicazione $X \to A \times \mathbb{K}$, $x \to (P_x, a(x))$. Fissato arbitrariamente $x_0 \in X$, poniamo

$$P = P_{x_0} + \sum_{x \in X} a(x)\overrightarrow{P_{x_0}P_x}$$

dove l'ultima sommatoria è un' ordinaria combinazione lineare di vettori di V. In accordo con il principio generale enunciato prima per i "sollevamenti", vogliamo determinare condizioni necessarie e sufficienti sui coefficienti $a(x)$ in modo che il punto P risultante non dipenda dalla scelta del punto base x_o in X. Applicando il triangolo ad ogni terna di punti P_{x_0}, P_{x_1}, P_x in A, abbiamo che $P_{x_1} + \sum_{x \in X} a(x)\overrightarrow{P_{x_1}P_x} = x_0 + (1 - \sum_x a(x))\overrightarrow{P_{x_0}P_{x_1}} + \sum_{x \in X} a(x)\overrightarrow{P_{x_0}P_x}$. Dunque la condizione cercata è

$$\sum_x a(x) = 1 \ .$$

Ogni volta che tale condizione è verificata

$$P = P_{x_0} + \sum_{x \in X} a(x)\overrightarrow{P_{x_0}P_x}$$

è una ben definita espressione del punto P come *combinazione affine di punti di* A (e non dipende dalla scelta del punto base P_{x_0}).

Se $\mathbb{Q}$ è un sottocampo di$\mathbb{K}$, un esempio importante di combinazione affine produce il *baricentro* di un dato insieme finito di punti. Siano $P_1, \dots, P_k$ punti distinti di A, allora il baricentro di questa collezione di punti è dato da

$$P = \sum_j \frac{1}{k} P_j \ .$$

In particolare $P = \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2$ è il *punto medio* tra i due punti dati. Si noti che nel caso di $A(\mathbb{R}^n)$ il punto medio può essere anche descritto come il punto equidistante dai punti dati, ma la definizione generale mostra che si tratta propriamente di una nozione affine, senza alcun riferimento necessario ad alcuna distanza.

4. Sottospazi affini

Mimando il caso dei sottospazi vettoriali, diciamo che un sottoinsieme $E \neq \emptyset$ di uno spazio affine A è un *sottospazio affine*, se E è chiuso rispetto alle combinazioni affini dei suoi punti. Conviene stipulare che anche l'insieme vuoto sia un sottospazio affine. In questo modo è immediato verificare che:

Proposizione 4.1. *L'intersezione di una arbitraria famiglia di sottospazi affini di A è a sua volta un sottospazio affine.*

La seguente Proposizione fornisce utili caratterizzazioni equivalenti dei sottospazi affini di A.

Proposizione 4.2. *Sia E un sottoinsieme non vuoto dello spazio affine A. Allora i seguenti fatti sono tra loro equivalenti:*

(1) *E è un sottospazio affine di A.*

(2) *Esiste un punto* P_0 *in* E *ed un sottospazio vettoriale* W_0 *di* V *tali che* $E = P_0 + W_0 := \{P_0 + w \in A;\ w \in W_0\}$.
(3) *Esiste un sottospazio* $T(E)$ *di* V *(detto la* giacitura *o anche lo* spazio vettoriale tangente a E*) tale che per ogni* $P \in E$ *si ha* $E = P + T(E)$.
(4) *Esiste un sottospazio* $T(E)$ *di* V *tale che* $F|E : E \times E \to T(E)$ *e* $(E, F|E)$ *definisce una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale* $T(E)$.

Dimostrazione. Supponiamo che E sia un sottospazio affine. Scelto arbitrariamente $P_0 \in E$, e posto W_0 il sottospazio vettoriale di V generato dai vettori della forma $\overrightarrow{P_0P}$ (cioè lo spazio formato dalle combinazioni lineari di questi vettori), dove P varia in E, è chiaro che $E = P_0 + W_0$. Viceversa se E è della forma $E = P_0 + W_0$, ogni espressione della forma $P = P_0 + \sum a_j w_j$ dove l'ultima è una arbitraria combinazione lineare di vettori di W_0, corrisponde in modo canonico alla espressione come combinazione affine di punti $P = (1 - \sum_j a_j)P_0 + \sum_j a_j(P_0 + w_j)$, e si deduce facilmente che E è chiuso per le combinazioni affini dei suoi punti.
La discussione precedente mostra che se E è un sottospazio affine e P_0, P_1 sono due punti di E, $E = P_0 + W_0 = P_1 + W_1$. Vogliamo dimostrare che $W_0 = W_1 = T(E)$. Basta dimostrare che se $P = P_1 + w_1$, $w_1 \in W_1$, allora $w_1 \in W_0$ (cioè $W_1 \subset W_0$, scambiando i ruoli si ottiene l'altra inclusione). Adesso $P = P_1 + w_1 = (P_0 + w_0) + w_1 = P_0 + (w_0 + w_1) = P_0 + w_0'$, dove $w_0, w_0' \in W_0$; quindi $w_1 = w_0' - w_0 \in W_0$.
L'equivalenza con l'ultimo punto è lasciata per esercizio.

□

Chiaramente, l'intero A è sottospazio (banale) di A, e $V = T(A)$.

Dato un sottoinsieme non vuoto X di A, il sottoinsieme $\mathrm{Comb}_a(X)$ formato da tutte le combinazioni affini di punti di X è il sottospazio affine generato da X ed è caratterizzato dalla proprietà di minimalità per cui se E è un sottospazio affine di A tale che $X \subset E \subset \mathrm{Comb}_a(X)$, allora $E = \mathrm{Comb}_a(X)$. La somma $E + E'$ di due sottospazi affini di A è il sottospazio generato dall'unione $E \cup E'$.

5. Applicazioni affini

Siano A uno spazio affine su V, B uno spazio affine su W, dove gli spazi vettoriali V e W sono sullo stesso campo di scalari $\mathbb{K}$. Mimando la nozione di applicazione lineare, $f : A \to B$ è una *applicazione affine* se per ogni combinazione affine di punti di A, $P = \sum_j a_j P_j$, si ha che $f(P) = \sum_j a_j f(P_j)$. Analogamente a quanto visto per i sottospazi affini, si hanno le seguenti caratterizzazioni equivalenti. Si noti che per ogni P_0 in A, posto $Q_0 = f(P_0)$ esiste un'unica applicazione $df_{P_0} : V \to W$ tale che, per ogni punto P di A, $f(P) = Q_0 + df_{P_0}(\overrightarrow{P_0, P})$.

Proposizione 5.1. *I seguenti fatti sono equivalenti:*

(1) $f : A \to B$ *è affine.*
(2) *Esiste* $P_0 \in A$ *tale* df_{P_0} *è lineare.*
(3) *Esiste* $df : V \to W$ *lineare (detta la* parte lineare *o anche il* differenziale *di* f*) tale che per ogni* $P_0 \in A$*, per ogni punto* P *di* A, $f(P) = f(P_0) + df(\overrightarrow{P_0, P})$.

Un'applicazione affine f è un *isomorfismo affine* se è biunivoca. Dunque è un isomorfismo se e solo se df è invertibile; f^{-1} è automaticamente affine e per ogni $Q_0, Q \in B$, $f^{-1}(Q) = f^{-1}(Q_0) + df^{-1}(\overrightarrow{Q_0, Q})$. Il gruppo delle trasformazioni affini $Aff(A)$ di A è dato dagli automorfismi affini di A. Se $A = A(V)$ è uno spazio standard, allora ritroviamo $Aff(A(V)) = Aff(V)$, cioè il gruppo di trasformazioni di V da cui siamo partiti.

6. Dimensione, indipendenza affine, coordinate affini

Se A è uno spazio affine su V e V ha dimensione finita, definiamo $\dim A := \dim V$.

Esercizi 6.1. Studiare $\dim E + E'$ in funzione di $\dim E$, $\dim E'$, $E \cap E'$.

Dato un insieme X fatto di $n+1$ punti distinti in A, diciamo che questi punti sono *affinemente indipendenti* se $\dim \mathrm{Comb}_a(X) = n$. Si verifica immediatamente che $\dim A = n$ se e solo se esiste X come sopra, fatto di punti affinemente indipendenti, tale che $A = \mathrm{Comb}_a(X)$. Se gli elementi di un tale X sono ordinati, $X = \{P_0, P_1, \dots, P_n\}$, diciamo che X è un *sistema di riferimento affine* su A. In tal caso, per ogni $P \in A$ esiste un'unica espressione come combinazione affine della forma

$$P = (1 - \sum_{j=1}^{n} a_j)P_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j P_j$$

e $(a_1, \dots, a_n)$ sono dette le *coordinate affini* di P rispetto al sistema X. $A(\mathbb{K}^n)$ ammette un sistema di riferimento affine canonico, $X_C = \{0, e_1, \dots, e_n\}$ dove gli e_j sono i punti che corrispondono ai vettori della base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{K}^n$. Per ogni $P = (x_1, \dots, x_n)^t \in A(\mathbb{K}^n)$, le coordinate affini di P rispetto a X_c coincidono con $(x_1, \dots, x_n)$. Se $\dim A = n$ e X è un sistema di riferimento affine su A, allora esiste un'unico isomorfismo affine $\phi_X : A \to A(K^n)$, che invia X su X_c (rispettando l'odine). Se $(a_1, \dots, a_n)$ sono le coordinate affini di P rispetto a X, allora $\phi_X(P) = (a_1, \dots, a_n)^t \in A(\mathbb{K}^n)$. Lasciamo al lettore il compito di esplicitare le formule che legano le coordinate affini rispetto a due riferimenti affini diversi.

7. Ancora sulle trasformazioni affini

Uno spazio affine A tale che $\dim A = 1$ è anche detto una *retta affine*. Data una retta affine A, data una terna ordinata di punti distinti di A, (P_0, P_1, P_2), (P_0, P_1) formano un sistema di riferimento affine su A e in modo unico $P_2 = P_0 + \lambda \overrightarrow{P_0P_1}$. Poniamo $\lambda := [P_0; P_1; P_2]$ che sarà detto il *rapporto semplice* della terna di punti.

Esercizi 7.1. Determinare come varia λ permutando i punti della terna.

E' immediato verificare che $f : A \to B$ è un isomorfismo affine tra due rette affini se e solo se f è biunivoca e *preserva il rapporto semplice* delle terne ordinate di punti: $[P_0; P_1; P_2] = [f(P_0); f(P_1); f(P_2)]$.

Sia ora A uno spazio affine, $\dim A = n$; le rette (affini) di A sono i sottospazi affini 1-dimensionali.

Dati due sottospazi E ed E' di A, diciamo che E è *parallelo* ad E' se $T(E) \subset T(E')$. Se restringiamo la relazione di parallelismo ai sottospazi di una data dimensione $0 \leq k \leq n$, questa è una relazione di equivalenza.

Sia ora $f \in Aff(A)$. La trasformazione affine f verifica notevoli proprietà geometriche; ne elenchiamo alcune:

- f trasforma (in modo biunivoco) sottospazi affini in sottospazi affini preservando la dimensione (in particolare trasforma rette in rette).
- Per ogni sottospazio affine E di A, $f| : E \to f(E)$ è un isomorfismo affine (in particolare trasforma rette in rette preservando il rapporto semplice).
- f preserva il parallelismo: se $T(E) \subset T(E')$ allora $T(f(E)) \subset T(f(E'))$

Un tema classico della geometria affine è quello di determinare condizioni geometriche minimali che caratterizzino le trasformazioni affini. Per completezza di informazione, riportiamo senza dimostrazione alcuni risultati non banali in quella direzione.

Teorema 7.1. *(1) Supponiamo che $1+1 \neq 0$ in $\mathbb{K}$. Allora una applicazione (insiemistica) $f : A \to A$ è una trasformazione affine di A se e solo se trasforma rette in rette ed esiste una retta E di A tale che $f| : A \to f(A)$ è un isomorfismo affine (cioè $f|$ preserva il rapporto semplice).*

(2) Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\dim A \geq 2$, allora $f : A \to A$ è una trasformazione affine se e solo se trasforma rette in rette.

Concludiamo indicando un' utile identificazione canonica di $Aff(\mathbb{K}^n)$ con un sottogruppo del gruppo lineare di matrici $GL(n+1, \mathbb{K})$. Dato $A(\mathbb{K}^n)$ con coordinate canoniche $(x_1, \dots, x_n)$, $A(\mathbb{K}^{n+1})$ con coordinate canoniche $(y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$, fissiamo l'inclusione affine $A(\mathbb{K}^n) \subset A(\mathbb{K}^{n+1})$ via $(x_1, \dots, x_n) \sim (x_1, \dots, x_n, 1)$ (cioè $A(\mathbb{K}^n)$ viene identificato con l'iperpiano affine di $A(K^{n+1})$ di equazione $y_{n+1} = 1$. Consideriamo il sottogruppo $G_a(n)$ di $GL(n+1, \mathbb{K})$ dato dalle trasformazioni lineari S di $\mathbb{K}^{n+1}$ tali che $A(\mathbb{K}^n)$ sia S-invariante. E' un facile esercizio mostrare che $S \in G_a(n)$ se e solo se è della forma (a blocchi)

$$S = \begin{bmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dove $P \in GL(n, \mathbb{K})$ e $D \in \mathbb{K}^n$. Il prodotto SS' di due tali matrici in $G_a(n)$ è della forma

$$SS' = \begin{bmatrix} PP' & PD' + D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ricordando la codifica degli elementi di $Aff(\mathbb{K}^n)$ per mezzo di tabelle della forma $(P|D)$ e la relativa legge di moltiplicazione viste in precedenza, vediamo immediatamente che

$$\phi : Aff(\mathbb{K}^n) \to G_a(n)$$

$$\phi(P|D) = \begin{bmatrix} P & D \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

è un isomorfismo canonico di gruppi. Inoltre, via l'identificazione prima fissata, $Aff(\mathbb{K}^n)$ e $G_a(n)$ agiscono nello stesso modo su $A(\mathbb{K}^n)$.