March 11, 2016

G215-16: VARIETÀ, 1

• Per ogni intero $n \geq 0$, uno spazio topologico X è *n-localmente euclideo* se per ogni $x \in X$ esiste (U, ϕ) dove U è un intorno aperto di x in X, $\phi : U \to W$ è un omeomorfismo, essendo $W \subset \mathbb{R}^n$ un aperto.

• Uno spazio topologico X è una *n-varietà topologica (TOP)* se è n-localmente euclideo ed inoltre è T_2 e 2-numerabile. Per esempio una 0-varietà è un insieme numerabile munito della topologia discreta; è compatto se e solo se è finito.

- Per ogni n, esistono spazi n-localmente euclidei che non sono T_2, oppure che non sono 2-numerabili.

• Ogni coppia (U, ϕ) come sopra è detta una *carta locale* di X; $(W, \psi = \phi^{-1})$ è detta una *parametrizzazione locale* di X. L'insieme $\mathcal{A}_X$ di tutte le carte locali è detto *atlante massimale* di X e individua la sua struttura di n-varietà topologica. *Un* atlante di X è una famiglia di carte locali $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ che ricopre X, cioè $\{U_j\}_{j \in J}$ è un ricoprimenmto aperto di X.

- Per specificare la struttura di varietà topologica su X è sufficiente esibire un atlante; l'atlante massimale è implicitamente definito e viene usato per esempio ogni volta che restringiamo una carta locale (U, ϕ) a $(U', \phi|U')$, dove $U' \subset U$ è un aperto.
- Un aperto U di $\mathbb{R}^n$ è una n-varietà topologica. Possiamo prendere l'atlante formato da una sola carta $\{(U, \phi)\}$, dove $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ è l'inclusione.
- La sfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ è una n-varietà topologica; possiamo prendere l'atlante formato da due carte $\{(U_+, p_+), (U_-, p_-)\}$, dove $U_\pm = S^n \setminus \{x_\pm\}$, $x_\pm = (0, \dots, 0, \pm 1)$ e

$$p_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n, 0)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

è l'omeomorfismo definito come la *proiezione stereografica* di centro $x_\pm$. S^n è compatta.
- Lo spazio proiettivo $\mathbf{P}^n$ è per definizione lo spazio topologico quoziente di $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ mediante la relazione di equivalenza proiettiva per cui $x \sim y$ se e solo se x e y generano lo stesso sottospazio vettoriale 1-dimensionale di $\mathbb{R}^{n+1}$. In modo equivalente si può ottenere $\mathbf{P}^n$ come quoziente di S^n mediante la restrizione della precedente relazione, per cui $x \sim y$ se e solo se $y = \pm x$. Da questo segue che $\mathbf{P}^n$ è compatto. $\mathbf{P}^n$ è una n-varietà topologica. Possiamo prendere l'atlante formato da $n+1$ carte $\{U_j, \phi_j)\}_{j=1,\dots,n+1}$, dove $U_j = \{[x]; x \in \mathbb{R}^{n+1},\ x_j \neq 0\}$, $\phi_j : U_j \to \mathbb{R}^n$, $\phi_j([x]) = (1/x_j)(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{n+1})$. La proiezione sul quoziente $p_S : S^n \to \mathbf{P}^n$ è localmente un omeomorfismo "$2:1$", cioè per ogni $x \in \mathbf{P}^n$, $p_S(x)^{-1}$ è formato da due punti.

• Se M è una m-varietà (TOP), M' una n-varieta', allora il prodotto $M \times M'$ è una $(n+m)$-varietà. Infatti Le proprietà T_2 e 2-numerabile si sollevano al prodotto, e il "prodotto" degli atlanti massimali $\mathcal{A}_M \times \mathcal{A}_N = \{(U \times U', \phi \times \phi')\}$ è un atlante di $M \times M'$.

• Se $f : Y \to X$ è un omeomorfismo e X è una n-varietà TOP, allora anche Y lo è; infatti se $\mathcal{A}_X = \{(U, \phi)\}$ è l'atlante massimale di X, allora $f^{-1}(\mathcal{A}_X) = \{(f^{-1}(U), \phi \circ f)\}$ (la restrizione di f è sottintesa) lo è per Y.

• I "morfismi" tra varietà topologiche sono le applicazioni continue; gli "isomorfismi" sono gli omeomorfismi. Quindi le varietà topologiche individuano un settore dello studio degli spazi topologici, ottenuto specializzando gli spazi ma non i morfismi.

- Le funzioni continue, possono avere comportamenti strani e piuttosto lontani dall' intuizione geometrica. Ricordiamo ad esempio la cosiddetta "curva di Peano" che consiste in un' applicazione continua e *surgettiva* definita sull'intervallo $[0,1]$ a valori nel quadrato $[0,1]^2$. D'altra parte lavorando con le funzioni continue e con gli omeomorfismi, succede che fatti intuitivamente plausibili (ad esempio "Se $\mathbb{R}^n$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^m$, allora $n = m$") siano veri ma di difficile dimostrazione. Le cose si semplificano se è possibile restringere la classe di funzioni con cui operare. Ad esempio si può dimostrare che non esistono curve di Peano differenziabili; l'invarianza della dimensione è ben nota se ci limitiamo agli isorfismi lineari. Queste considerazioni motivano la specializzazione della nozione di varietà definendo la classe delle varietà *differenziabili (DIFF)*.

• Indichiamo con $M(k,n)$ lo spazio delle matrici reali $k \times n$ che può essere naturalmente identificato con $\mathbb{R}^{kn}$ e coincide con lo spazio delle applicazioni lineari $Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Ricordiamo che $f : U \to R^k$ definita sull'aperto $U \subset R^n$ è differenziabile se esiste l'*applicazione differenziale*

$$df : U \to Hom(R^n, R^k),\ x \to d_x f$$

tale che per ogni $x \in U$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - d_x f(h)}{||h||} = 0\ .$$

Se $f : U \to W$, W aperto di $\mathbb{R}^k$, $g : W \to \mathbb{R}^m$, f, g differenziabili, allora per ogni $x \in U$,

$$d_x(g \circ f) = d_{f(x)} g \circ d_x f;\ d_x \mathrm{id} = I\ .$$

L'applicazione f è C^0 se è continua; è C^r se è differenziabile e *df* è C^{r-1}; è C^∞ (si dice anche "liscia") se è C^r per ogni $r \geq 0$.

- f è liscia se esistono e sono continue le derivate parziali

$$\frac{\partial^r f_j}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_r}}$$

per $j = 1, \dots, k$, per ogni ordine $r \geq 0$. In particolare, per ogni $x \in U$,

$$d_x f = (\partial f_j / \partial x_i(x))_{j=1,\dots,k;\ i=1,\dots,n}$$

detta anche *matrice Jacobiana di f in x.*

$f : U \to W$ come sopra è un *diffeomorfismo* se è liscia, invertibile e con f^{-1} liscia.

- Se $f : U \to W$ è un diffeomorfismo, allora $n = k$ (passando ai differenziali, ci riconduciamo al caso degli isomorfismi lineari).

• Data una n-varietà TOP X, un *atlante differenziabile (DIFF)* $\{(U_j, \phi_j)\}_{j \in J}$ è un atlante tale che per ogni $(i,j) \in J^2$, $\phi_j \circ (\phi_i)^{-1}$, definito su $\phi_i(U_i \cap U_j)$ e a valori in $\phi_j(U_i \cap U_j)$, è un diffeomorfismo tra aperti di $\mathbb{R}^n$. Una struttura di n-varietà DIFF su X è individuata da un atlante DIFF *massimale* (cioè non propriamente contenuto in alcun atlante DIFF).

- Per specificare una struttura di varietà DIFF su X è sufficiente esibire un atlante DIFF; l'atlante massimale DIFF è implicitamente definito e viene usato per esempio ogni volta che restringiamo una carta locale (U, ϕ) a $(U', \phi|U')$, dove $U' \subset U$ è un aperto.
- Gli esempi di varieta' e atlanti visti sopra (aperti di $\mathbb{R}^n$, sfere S^n, $\mathbf{P}^n$) sono in effetti di classe DIFF.
- Il prodotto di varietà DIFF è una varietà DIFF.

• Data un'applicazione continua tra varietà DIFF $f : M \to N$, una *rappresentazione locale* di f è della forma

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U) \to \psi(W)$$

dove (U, ϕ) appartiene all'atlante DIFF massimale di M, (W, ψ) all'atlante DIFF massimale di N, $f(U) \subset W$. f è *liscia* se per ogni $x \in M$ esiste una rappresentazione locale *liscia* tale che $x \in U$.

- Se f è liscia, allora ogni rappresentazione locale di f è liscia.

f è un *diffeomorfismo* se è liscia, invertibile e con inversa liscia.

- Sia M_0 una varietà DIFF e $f : M_1 \to M_0$ un *omeomorfismo.* Se $\mathcal{A}_0$ è l'atlante DIFF massimale di M_0, allora $\mathcal{A}_1 = f^{-1}(\mathcal{A}_0)$ è l'atlante massimale di una struttura DIFF su M_1 per cui f è "tautologicamente" un *diffeomorfismo.* In particolare se $M_1 = M_0 = M$, in generale $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ sono strutture DIFF *differenti* su M (in altre parole $id : M \to M$ *non* è un diffeomorfismo), che però sono tra loro "isomorfe" (cioè diffeomorfe) mediante il diffeomorfismo f.