Analisi I - IngBM - 2014-15
COMPITO A 15 Settembre 2015

COGNOME .... NOME ....

MATRICOLA .... VALUTAZIONE ..... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia a_n la successione

$$a_n = \frac{n^n - n^3}{n! - n^2}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ed in caso affermativo calcolarlo.

SOLUZIONE. ☐Il limite L non esiste $\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale $+\infty$
perché si ha

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n(1 - \frac{n^3}{n^n})}{n!(1 - \frac{n^2}{n!})}$ e per i risultati sull'ordine relativo di crescenza di alcune succesioni (vedi dispensa LIMSUCC.) si ha $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n!} = 0$ e $\lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n!} = \infty$.

Esercizio 2. (3 punti)
Siano A e B due sottoinsiemi dell'insieme X. Negare la proposizione

Qualche elemento dell'insieme A non appartiene all'insieme B

è equivalente ad affermare una delle seguenti proposizioni? (barrare la casella che si ritiene sia la risposta corretta)

(1) $\boxed{\text{X}}$ $A \subset B$
(2) $\square$ $A \cap B \neq \emptyset$
(3) $\square$ $A \subset X \setminus B$
(4) $\square$ $A \cap (X \setminus B) \neq \emptyset$
(5) $\square$ nessuna di queste.

SPIEGAZIONE. Poiché la negazione della proposizione è

Ogni elemento dell'insieme A appartiene all'insieme B

ciò equivale a dire che A è sottoinsieme di B.

Esercizio 3. (4 punti) Siano f e g due funzioni da $\mathbf{R}$ a $\mathbf{R}$.

(1) Si ricordi la definizione di funzione limitata
(2) Se la funzione f è limitata, le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono limitate?
(3) Se la funzione f è limitata e la funzione g è continua le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ sono limitate?

SOLUZIONE.

- Una funzione $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si dice limitata se esistono m e M in $\mathbf{R}$ tali che per ogni $x \in \mathbf{R}$ si ha $m \leq h(x) \leq M$.
- Per le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$ si ha

$f \circ g$:
- $\boxed{\text{X}}$ è limitata perché essendo f limitata, si ha che esistono m_f e M_f reali, tali che $\forall x \in \mathbf{R}$ $m_f \leq f(x) \leq M_f$ e quindi $\forall x$ si ha $m_f \leq f(g(x)) \leq M_f$
- $\square$ non è necessariamente limitata perché

$g \circ f$:
- $\square$ è limitata perché
- $\boxed{\text{X}}$ non è necessariamente limitata perché se ad esempio si considerano le funzioni $f = \sin x$ e $g(x)$ definita come $\dfrac{1}{1-x^2}$ se $-1 < x < 1$ e 0 nel complementare, si ha che l'immagine di $g \circ f$ è illimitata .

- Per le funzioni $f \circ g$ e $g \circ f$, nel caso che g sia continua si ha

$f \circ g$

- $\boxed{\text{X}}$ è limitata per lo stesso motivo del caso precedente perhé non serve la continuità della g.
- $\square$ non è necessariamente limitata perché

$g \circ f$

- $\boxed{\text{X}}$ è limitata perché una funzione continua manda un intervallo chiuso e limitato in un intervallo limitato.
- $\square$ non è necessariamente limitata perché

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri l'equazione

$$\cos e^x - \sin e^x = 0.$$

(1) Si provi che l'equazione, per $x \in (-\infty, 0]$, ha almeno una soluzione.
(2) Si discuta se tale soluzione, sempre per $x \in (-\infty, 0]$, è unica o no.

SOLUZIONE.

(1) La cosa si può vedere in molti modi. Uno è quello di vedere che $\lim_{x\to-\infty}$ della funzione $f = \cos e^x - \sin e^x$ è $1 - 0 = 1 > 0$ mentre nell'origine la funzione vale $\cos 1 - \sin 1 < 0$ essendo $1 > \pi/4$. Quindi esiste $K < 0$ tale che $f(K) > 0$ (permanenza del segno) quindi nell'intervallo $[K, 0] \subset (-\infty, 0]$ la funzione f ha almeno uno zero.

Un secondo modo è quello di notare che $\cos e^x = \sin e^x$ per gli x per cui $e^x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$ con $k \in \mathbb{N}$. Essendo $0 < \dfrac{\pi}{4} < 1$ $\log \dfrac{\pi}{4} < 0$ e quindi è una soluzione dell'equazione nell'intervallo proposto.

(2) Riguardo l'unicitá si osservi che per $x \in (-\infty, 0]$ $0 < e^x \leq 1$ e l'unico valore di k per cui $0 < \dfrac{\pi}{4} + k\pi \leq 1$ è $k = 0$. Pertanto la soluzione trovata è unica.

Allo stesso risultato si poteva pervenire osservando che la derivata della funzione f è $-e^x(\sin e^x + \cos e^x$ che in tale intervallo è negativa, quindi la funzione $f = \cos e^x - \sin e^x$ è monotona decrescente, quindi in tale intervallo ha un solo zero.

Esercizio 2. (8 punti) Si consideri la funzione f da $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$f = |x-1| - |x+1| + |x+2| - |x-2|$$

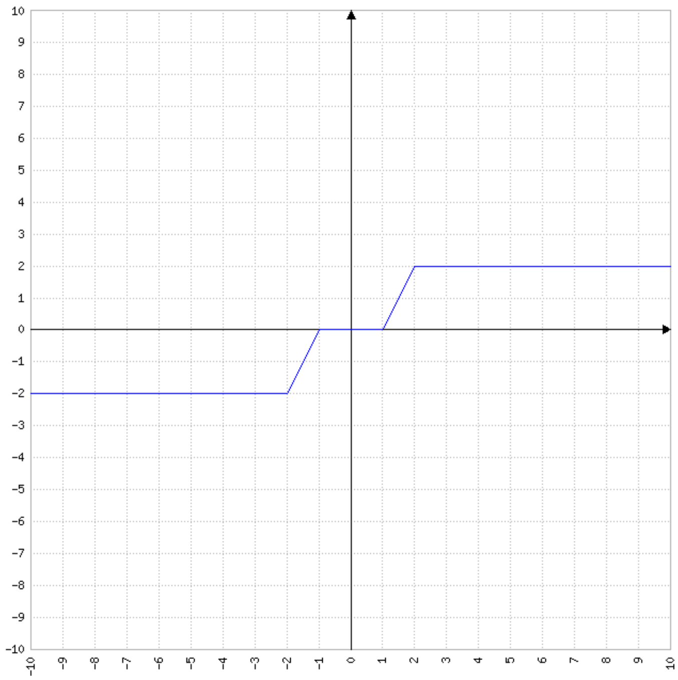
Determinare (se esistono):

(1) L'insieme dei punti C di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è continua.
(2) L'insieme dei punti D di $\mathbf{R}$ dove la funzione f è differenziabile.
(3) I punti di minimo e massimo locale della funzione f.
(4) I punti di minimo e massimo assoluto della funzione f.
(5) Gli asintoti del grafico della funzione f.
(6) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ poniamo $a_n = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x)dx$. Dire se esiste finito $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$.

SOLUZIONE.

- $C = \mathbf{R}$
- $D = \mathbf{R} \setminus \{-2, -1, 1, 2\}$
- I punti di minimo locale sono $(-\infty, -2] \cup (-1, 1] \cup (2, \infty)$
- I punti di massimo locale sono $(-\infty, -2) \cup [-1, 1) \cup [2, \infty)$
- I punti di minimo assoluto sono $(-\infty, -2]$
- I punti di massimo assoluto sono $[2, \infty)$
- Gli asintoti della funzione sono le rette $y = -2$ e $y = 2$.
- Si può verificare sia facendo il calcolo diretto, sia per motivi di simmetria $(f(-x) = -f(x))$ che la successione a_n è la successione costante 0 $\left(a_n = \displaystyle\int_{-n}^{n} f(x)dx = \int_{-n}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{n} f(x)dx = 0\right)$. Quindi il limite esiste e vale 0.

Al fine di rendere più chiara la situazione abbiamo aggiunto il grafico dell'andamento della funzione f.



Esercizio 3. (8 punti)
Si trovino le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' - y = \frac{x}{x-1}e^x$$

tali che $y(0) = -2$
SOLUZIONE.
L'equazione proposta ha senso solo per $x \neq 1$.
Una soluzione generale dell'equazione omogenea associata è del tipo $y = ce^x$. Applicando i metodi usuali per il calolo di una soluzione particolare, ci riconduciamo ad una equazione del tipo $c' = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$, da cui integrando otteniamo $c(x) = x + log|x-1|$. Quindi abbiamo come integrale della equazione proposta $y = ce^x + x + \log|x-1|$. Imponendo la condizione iniziale otteniamo per c il valore -2 e quindi

$$y = -2e^x + x + \log|x-1|.$$