Ing. Biomedica - 2016-17

Analisi I CORSO A
22 Luglio 2017

Compito X

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 1. (*Punti 4.)*

Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{1 - x^2}{1 + x^2}$.

(1) Calcolare, se esiste, $L = \lim_{x \to +\infty} f(x)$.
(2) Determinare, se esiste, $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x > M$ $f(x)$ appartenga all'intorno di raggio $\dfrac{1}{4}$ di tale limite L.

SOLUZIONE.

(1) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -1$.
(2) Cerchiamo $M \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x > M$, $|f(x) + 1| < 1/4$, cioé $\dfrac{2}{1 + x^2} < 1/4$. Ne segue che ogni $M > \sqrt{7}$ verifica la proprietà voluta.

Esercizio 2. (*Punti 3.*) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x} & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se la funzione è una funzione crescente su $\mathbb{R}$.
SOLUZIONE.

Benché la funzione sia crescente separatamente sulle semirette $\{x < 0\}$ e $\{x > 0\}$ rispettivamente (perché, per esempio, la restrizione della funzione su ciascuna semiretta è derivabile con derivata strettamente positiva), la funzione NON è crescente su tutto $\mathbb{R}$. Per esempio $x_1 = -1/2 < 1 = x_2$, $f(x_1) = 4 > 1 = f(x_1)$. Si noti che f non è continua, e quindi non è derivabile, in 0.

Esercizio 3. (*Punti 3.*) Determinare, se esiste, un minimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si abbia $3^n > 11n$.
SOLUZIONE.

Analizzando direttamente i primi casi vediamo che la disuguaglianza vale per $n = 0$, non vale per $n = 1, 2, 3$, vale per $n = 4$ e $n = 5$. Possiamo allora congetturare che $n_0 = 4$ e dimostrarlo per induzione. Abbiamo gia' verificato che la disuguagliaza $s(n)$ vale per $n = 4$. Resta da dimostrare il passo induttivo: per ogni $n \geq 4$, $s(n) \Rightarrow s(n+1)$.
Infatti $3^{n+1} = 3(3^n) > 3(11n)$ applicando l'ipotesi induttiva. D'altra parte $3(11n) = 11n + 2(11n) > 11(n+1)$ se e solo se $11n > 0$ se e solo se $n > 1$, quindi vale senz'altro nella nostra ipotesi $n \geq 4$.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (*Punti 10.*)
Si consideri la formula

$$f(x) = (\log(x))^{2/3} e^{\frac{-1}{2x-1}}$$

a) Determinare il piu grande sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ tale che la formula definisca una funzione $f : D \to \mathbb{R}$.
b) Determinare il piú grande sottoinsieme C di D tale che la restrizione di f su C sia continua.
c) Determinare il piú grande sottoinsieme aperto R di D tale che la restrizione di f su R sia derivabile
d) Determinare i punti di D che siano di minimo assoluto o relativo di f.
e) Determinare i punti di D che siano di massimo assoluto o realtivo di f.

SOLUZIONE.

a) Ci sono due risposte entrambe accettabili:
- Nella prima si considera la funzione $x = y^{1/3}$ come inversa della funzione $y = x^3$ che è definita e bigettiva su tutto $\mathbb{R}$. In questo caso $D = \{x > 0\} \setminus \{1/2\}$.
- Nella seconda si considera $x = y^{2/3}$ come un caso particolare delle funzioni elevamento a potenza che sono state definite in generale per $y \geq 0$. In questo caso allora $D = \{x \geq 1\}$.

Il resto della discussione dovrà essere coerente con la scelta della prima risposta.

b) In entrambi i casi $C = D$ perché si tratta di una funzione continua elementare sul suo dominio di definizione.
c) Se D è nel primo caso, allora $R = D \setminus \{1\}$. Infatti in 1 la funzione non è derivabile e il grafico presenta una cuspide verticale. Nel secondo caso $R = \{x > 1\}$.

d) In entrambi i casi la funzione è non negativa su tutto D. In entrambi i casi $x = 1$ è un punto di minimo assoluto perché $f(1) = 0$. Nel secondo caso non ci sono altri punti di minimo assoluto o locale. Nel primo caso c'e' un ulteriore punto di minimo locale nell'intervallo $(0, 1/2)$.

e) In entrambi i casi non ci sono punti di massimo assoluto perché la funzione non è superiormente limitata. Nel primo caso c'è un punto di massimo locale nell'intervallo $(1/2, 1)$. Nel secondo caso la funzione è crescente e non ci sono nemmeno punti di massimo locale.

Esercizio 2. (*Punti 4.*) Sia $z = (1+i)^{10} \in \mathbb{C}$.

(1) Determinare il modulo $|z|$ e largomento principale, cioè l'argomento di z tale che $\mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi)$.
(2) Scrivere z nella forma $z = a + ib$.

SOLUZIONE.

(1) $|z| = 32$ $\qquad$ $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}$
(2) $z = 0 + i32$

Poniamo $w = 1 + i$, per cui $z = w^{10}$; $w = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$, per cui $z = \sqrt{2}^{10}(\cos(10\pi/4) + i\sin(10\pi/4))$. Quindi $|z| = 32$, $\mathrm{Arg}(z) = \dfrac{\pi}{2}$, $z = 0 + i32$.

Esercizio 3. (*Punti 4.*) Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \arctan(x^{1835} + 2x^{71} - 561)$$

.

Determinare se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $f(a) = 0$.

SOLUZIONE.

La funzione arcotangente si annulla (solo) in 0. Basta allora dimostrare che esiste a tale che $P(a) = 0$, dove $P(x) = x^{1835} + 2x^{71} - 561$. $P(x)$ è una funzione polinomiale di grado dispari ed abbiamo visto a lezione, come applicazione del teorema degli zeri, che ammette sicuramente uno zero.

Esercizio 4. (*Punti 6.)* Si consideri lequazione differenziale

$$y' = (y^2 - 1)x^3$$

(1) Determinare se esiste una soluzione tale che y(0)=1.
(2) Determinare se esiste una soluzione tale y(0)=0.

SOLUZIONE.

Si osserva subito che le funzioni costanti $y = 1$ e $y = -1$ sono soluzioni dell'equazione. In particolare $y = 1$ risponde positivamente alla prima domanda.
Restringiamo le equazioni alle bande $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 1\}, \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -1 < y < 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y < -1\}$.
Su ciascuna banda abbiamo una soluzione generale implicita dell'equazione della forma $\frac{1}{2} \log \left| \frac{y-1}{y+1} \right| = \frac{x^4}{4} + C,\ C \in \mathbb{R}$.
Per determinare una soluzione tale che $y(0) = 0$, ci restrigiamo alla banda $\{-1 < y < 1\}$.
Su tale banda la soluzione generale diventa $\frac{1}{2} \log \frac{1-y}{y+1} = \frac{x^4}{4} + C$. Imponendo $y(0) = 0$, si ottiene $\frac{1}{2} \log(1) = C$ da cui si ricava $C = 0$.
In definitiva si ottiene la soluzione implicita $\log \frac{1-y}{y+1} = \frac{x^4}{2}$, da cui $\frac{1-y}{y+1} = e^{\frac{x^4}{2}}$, da cui $1 - y = (y + 1)e^{\frac{x^4}{2}}$, $y(e^{\frac{x^4}{2}} + 1) = 1 - e^{\frac{x^4}{2}}$, infine $y = \frac{1 - e^{\frac{x^4}{2}}}{e^{\frac{x^4}{2}} + 1}$, che è una soluzione massimale definita su tutto $\mathbb{R}$.