

COGNOME NOME

MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 1. (Punti 3.)

Sia $\{a_n\}$ la successione $\frac{n+2}{n+3}$. Trovare un \bar{n} tale che per ogni $n > \bar{n}$, a_n sia nell'intorno

di raggio $\epsilon = \frac{1}{10}$ del suo limite.

SOLUZIONE

Il limite della successione $\{a_n\}$ è 1 ed inoltre la successione è monotona crescente, quindi per trovare \bar{n} è sufficiente verificare per quali n si ha $1 - \frac{n+2}{n+3} < \frac{1}{10}$. Cioè $\frac{1}{n+3} < \frac{1}{10}$ e, dato il fatto che la successione è monotona, questo è vero non appena $n > 7$.

Esercizio 2. (Punti 4.) Si consideri la funzione definita dalla formula

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^6} & \text{se } x \neq 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dire, motivando la risposta, per ognuna delle seguenti affermazioni se essa è vera o falsa.

- (1) Per ogni successione $\{a_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = +\infty$
- (2) Esiste una successione $\{a_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e la successione $f(a_n)$ non ammette limite
- (3) Esiste una successione $\{a_n\}$ tale che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ e la successione $f(a_n)$ ha come limite 2

SOLUZIONE (Barrare per ogni questo la casella che si ritiene essere la risposta corretta)

- (1) VERO FALSO

Motivazione.

È conseguenza delle risposte ai quesiti successivi.

- (2) VERO FALSO

Motivazione.

Basta considerare ad esempio la successione $a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{1}{n} & n = 2k + 1 \end{cases}$.

La successione $f(a_n)$ non ammette limite poichè ha due sottosuccessioni convergenti rispettivamente a 2 e a $+\infty$.

- (3) VERO FALSO

Motivazione. Basta considerare la successione $\{a_n\}$ i cui termini sono tutti 0.

Esercizio 3. (Punti 3.) Si consideri la funzione definita su \mathbb{R} dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{se } x \leq 0 \\ 2x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se esiste un intorno aperto U di 0 tale che $f|_U$ è crescente.

SOLUZIONE.

Per verificare se esiste un intorno aperto U di 0 tale che $f|_U$ è crescente occorre verificare se esiste un intorno U di 0 per cui $\forall x_1, x_2 \in U$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

Si osservi che se x_1 e x_2 sono entrambi negativi o entrambi positivi cioè è sicuramente verificato poichè la funzione ristretta a \mathbb{R}^- e a \mathbb{R}^+ risulta crescente. Nel caso in cui $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ risulta $f(x_1) = 3x_1$ e $f(x_2) = 2x_2$ e quindi ancora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto la funzione è crescente in tutto \mathbb{R} . Si osservi che la funzione non è derivabile in 0.

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (*Punti 10.*)

Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} \sup(2, \frac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

- (1) Determinare il più grande sottoinsieme C di $\mathbb{R}^{\geq 0}$ tale che f sia continua su C .
- (2) Determinare il più grande sottoinsieme aperto D di C tale che f sia derivabile su D .
- (3) Determinare, se esistono, i punti di minimo e massimo assoluti di f .
- (4) Determinare, se esistono, i punti di minimo e massimo locali di f .
- (5) Calcolare l'area del sottografico nell'intervallo $[\frac{1}{3}, 3]$

SOLUZIONE

- (1) $C = \mathbb{R}^{\geq 0} \setminus \{0\}$
- (2) $D = \mathbb{R}^{\geq 0} \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$
- (3) Poiché $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ non vi sono punti di massimo assoluto, mentre in 0 la funzione assume il suo minimo assoluto.
- (4) Tutti i punti della semiretta aperta $x > \frac{1}{2}$ sono punti di massimo locale mentre quelli della semiretta chiusa $x \geq \frac{1}{2}$ e lo 0 sono punti di minimo locale.
- (5) L'area del sottografico vale $\int_{\frac{1}{3}}^3 f(x)dx = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 2dx = [\log x]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} + [2x]_{\frac{1}{2}}^3 =$
 $(\log \frac{1}{2} - \log \frac{1}{3}) + (6 - 1) = \log \frac{3}{2} + 5$

Esercizio 2. (Punti 4.)

Sia $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che sia definita la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

Si chiede se $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ è definita la funzione integrale $F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt$

SOLUZIONE.

La funzione $F_{x_0}(x)$ è definita per tutti i punti e risulta

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = - \int_1^{x_0} f(t)dt + F(x) = F(x) - F(x_0)$$

Esercizio 3. (Punti 4.)

Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $e^{z(z-i)} = 1$ che sono nel dominio $A = \{x^2 + y^2 \leq 4\}$.

SOLUZIONE.

Le soluzioni di $e^{z(z-i)} = 1$ sono i numeri complessi z tali che $z(z-i) = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.

Osserviamo che la richiesta di essere nel dominio A implica che si possono considerare solo alcuni valori di k , poiché se z è una soluzione in A in particolare $|z| < 2$ e quindi $|z(z-i)| < 6$ perché $|z-i| < |z| + |i| = 3$. Quindi $z(z-i) = 2k\pi i$ può essere verificata da un valore in A solo se $k = 0$ perché già per $k = 1$ si ha $|2k\pi i| = |2| \cdot |1| \cdot |\pi| \cdot |i| > 6$. Per $k = 0$ le soluzioni sono 0 e i che sono entrambe in A .

Esercizio 4. (Punti 6.)

Trovare le soluzioni generali dell'equazione differenziale

$$y' = y^2 x^2$$

Si dica se esiste una soluzione tale che $y(1) = 3$ e in caso affermativo si discuta l'intervallo massimale di definizione di tale soluzione.

SOLUZIONE

L'equazione proposta è a variabili separabili. Osserviamo che la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione proposta ma che non verifica la condizione iniziale richiesta.

Restringendosi a $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$, una integrazione immediata porta a verificare che la soluzione generale ha la forma implicita $-\frac{1}{y} = \frac{1}{3}t^3 + C$ che si può facilmente esplicitare

$$\text{in } y = -\frac{3}{t^3 + 3C}.$$

Per via della condizione iniziale ci restringiamo al dominio $y > 0$ poiché $y(1) = 3 > 0$ e otteniamo $C = -\frac{2}{3}$ per cui in definitiva otteniamo la soluzione $y(t) = \frac{3}{2-t^3}$ e poiché deve essere $y(t) > 0$ si ha $2-t^3 > 0$ cioè $t < \sqrt[3]{2}$, cioè l'intervallo massimale è $(-\infty, \sqrt[3]{2})$.