Ing. Biomedica - 2016-17

Analisi I CORSO A
1 Luglio 2017

Compito X

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 1. (*Punti 3.)*
Sia $\{a_n\}$ la successione $\dfrac{n+1}{n+2}$. Trovare un $\overline{n}$ tale che per ogni $n > \overline{n}$, a_n sia nell'intorno di raggio $\epsilon = \dfrac{1}{10}$ del suo limite.
SOLUZIONE
Il limite della successione $\{a_n\}$ è 1 ed inoltre la successione è monotona crescente ($\dfrac{n+1}{n+2} < \dfrac{n+2}{n+3}$ poiché $(n+1)(n+3) = n^2 + 4n + 3 < n^2 + 4n + 4 = (n+2)^2$), quindi per trovare $\overline{n}$ è sufficiente verificare per quali n si ha $1 - \dfrac{n+1}{n+2} < \dfrac{1}{10}$. Cioè $\dfrac{1}{n+2} < \dfrac{1}{10}$ e, dato il fatto che la successione è monotona,questo è vero non appena $n > 8$.

Esercizio 2. (*Punti 4.)* Si consideri la funzione definita dalla formula

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^4} & \text{se } x \neq 0 \\ 3 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Dire, motivando la risposta, per ognuna delle seguenti affermazioni se essa è vera o falsa.

(1) Per ogni successione $\{a_n\}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ allora $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = +\infty$

(2) Esiste una successione $\{a_n\}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e la successione $f(a_n)$ non ammette limite

(3) Esiste una successione $\{a_n\}$ tale che $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ e la successione $f(a_n)$ ha come limite 3

SOLUZIONE(Barrare per ogni quesito la casella che si ritiene essere la risposta corretta)

(1) ☐ VERO ☒ FALSO
Motivazione.
È conseguenza delle risposte ai quesiti successivi.

(2) ☒ VERO ☐ FALSO
Motivazione.
Basta considerare ad esempio la successione $a_n = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \dfrac{1}{n} & n = 2k+1 \end{cases}$.
La successione $f(a_n)$ non ammette limite poichè ha due sottosuccessioni convergenti rispettivamente a 3 e a $+\infty$.

(3) ☒ VERO ☐ FALSO
Motivazione. Basta considerare la successione $\{a_n\}$ i cui termini sono tutti 0.

Esercizio 3. (*Punti 3.)* Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}$ dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } \ x \leq 0 \\ x & \text{se } \ x \geq 0 \end{cases}$$

Dire se esiste un intorno aperto U di 0 tale che $f_{|U}$ è crescente.
SOLUZIONE.
Per verificare se esiste un intorno aperto U di 0 tale che $f_{|U}$ è crescente occorre verificare se esiste un intorno U di 0 per cui $\forall x_1, x_2 \in U \text{con} x_1 < x_2 \text{risulta} f(x_1 < f(x_2)$.
Si osservi che se x_1 e x_2 sono entrambi negativi o entrambi positivi ció è sicuramente verificato poiché la funzione ristretta a $\mathbb{R}^-$ e a $\mathbb{R}^+$ risulta crescente. Nel caso in cui $x_1 < 0$ e $x_2 > 0$ risulta $f(x_1) = 2x_1$ e $f(x_2) = x_2$ e quindi ancora $f(x_1) < f(x_2)$. Pertanto la funzione è crescente in tutto $\mathbb{R}$. Si osservi che la funzione non è derivabile in 0.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (*Punti 10.*)
Si consideri la funzione definita su $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ dalla formula

$$f(x) = \begin{cases} \sup(3, \dfrac{1}{x}) & \text{se } x > 0 \\ 2 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

(1) Determinare il più grande sottoinsieme C di $\mathbb{R}^{\geq 0}$ tale che f sia continua su C.
(2) Determinare il più grande sottoinsieme aperto D di C tale che f sia derivabile su D.
(3) Determinare, se esistono, i punti di minimo e massimo assoluti di f.
(4) Determinare, se esistono, i punti di minimo e massimo locali di f.
(5) Calcolare l'area del sottografico nell'intervallo $[\frac{1}{5}, 3]$

SOLUZIONE

(1) $C = \mathbb{R}^{\geq 0} \setminus \{0\}$
(2) $D = \mathbb{R}^{\geq 0} \setminus \{0, \frac{1}{3}\}$
(3) Poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ non vi sono punti di massimo assoluto, mentre in 0 la funzione assume il suo minimo assoluto.
(4) Tutti i punti della semiretta aperta $x > \frac{1}{3}$ sono punti di massimo locale mentre quelli della semiretta chiusa $x \geq \frac{1}{3}$ e lo 0 sono punti di minimo locale.
(5) L'area del sottografico vale $\int_{\frac{1}{5}}^{3} f(x)dx = \int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} \frac{1}{x}dx + \int_{\frac{1}{3}}^{3} 3dx = [\log x]_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{3}} + [3x]_{\frac{1}{3}}^{3} =$ $(\log \frac{1}{3} - \log \frac{1}{5}) + (9 - 1) = \log \frac{5}{3} + 8$

Esercizio 2. (*Punti 4.)*
Sia $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione tale che sia definita la funzione integrale

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt$$

Si chiede se $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ è definita la funzione integrale $F_{x_0}(x) = \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)dt$
SOLUZIONE.
La funzione $F_{x_0}(x)$ è definita per tutti i punti e risulta

$$F_{x_0}(x) = \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_{x_0}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = -\int_1^{x_0} f(t)dt + F(x) = F(x) - F(x_0)$$

Esercizio 3. (*Punti 4.)*
Si determinino tutte le soluzioni complesse dell'equazione $e^{z(z-i)} = 1$ che sono nel dominio $A = \{|x| + |y| \leq 2\}$.
SOLUZIONE.
Le soluzioni di $e^{z(z-i)} = 1$ sono i numeri complessi z tali che $z(z-i) = 2k\pi i$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$.
Osserviamo che la richiesta di essere nel dominio A implica che si possono considerare solo alcuni valori di k, poiché se z è una soluzione in A in particolare $|z| < 2$ e quindi $|z(z-i)| < 6$ perché $|z-i| < |z| + |i| = 3$. Quindi $z(z-i) = 2k\pi i$ può essere verificata da un valore in A solo se $k = 0$ perché gia per $k = 1$ si ha $|2k\pi i| = |2| \cdot |1| \cdot |\pi| \cdot |i| > 6$
Per $k = 0$ le soluzioni sono 0 e i che sono entrambe in A

Esercizio 4. (*Punti 6.)*
Trovare le soluzioni generali dell'equazione differenziale

$$y' = y^2 x^2$$

Si dica se esiste una soluzione tale che $y(1) = 3$ e in caso affermativo si discuta l'intervallo massimale di definizione di tale soluzione.
SOLUZIONE
L'equazione proposta è a variabili separabili. Osserviamo che la funzione $y = 0$ è una soluzione dell'equazione proposta ma che non verifica la condizione iniziale richiesta.
Restringendosi a $\mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\}$, una integrazione immediata porta a verificare che la soluzione generale ha la forma implicita $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}t^3 + C$ che si può facilmente esplicitare in $y = -\dfrac{3}{t^3 + 3C}$.
Per via della condizione iniziale ci restringiamo al dominio $y > 0$ poiché $y(1) = 3 > 0$ e otteniamo $C = -\dfrac{2}{3}$ per cui in definitiva otteniamo la soluzione $y(t) = \dfrac{3}{2 - t^3}$ e poiché deve essere $y(t) > 0$ si ha $2 - t^3 > 0$ cioè $t < \sqrt[3]{2}$, cioè l'intervallo massimale è $(-\infty, \sqrt[3]{2})$.