March 11, 2016

G215-16: "LINEARIZZAZIONI" DI APPLICAZIONI LISCE TRA APERTI DI SPAZI EUCLIDEI

• Consideriamo un'applicazione liscia $f : U \to \mathbb{R}^k$, dove U è un aperto di $\mathbb{R}^n$. Per semplicità supponiamo che $0 \in U$ e $f(0) = 0$. U, $\mathbb{R}^k$ sono considerate come varietà lisce, quindi possiamo applicare loro le nozioni di carta e parametrizzazione locale.

• **(Teorema della funzione inversa)** Supponiamo che $d_0 f$ sia invertibile (questo implica che $n = k$, inoltre per continuità esiste un intorno aperto A di 0 in U tale che per ogni $x \in A$, $d_x f$ è invertibile). Allora esiste un aperto U' di U, $0 \in U'$, tale che (U', f) è una carta locale di U (la restrizione di f è sottintesa).

• **(Teoremi della funzione implicita)** Sono corollari del teorema della funzione inversa.
(Versione surgettiva) Supponiamo che $d_0 f$ sia surgettivo (questo implica che $n \geq k$, inoltre per continuità esiste un intorno aperto A di 0 in U tale che per ogni $x \in A$, $d_x f$ è surgettivo). Allora esiste una parametrizzazione locale di U intorno a 0, $\psi : W \to U' \subset U$, $0 \in W \in \mathbb{R}^n$, $\psi(0) = 0$, tale che per ogni $x = (x_1, \dots, x_n) \in W$, $f \circ \psi(x) = (x_1, \dots, x_k)$.

(Versione iniettiva) Supponiamo che $d_0 f$ sia iniettivo (questo implica che $n \leq k$, inoltre per continuità esiste un intorno aperto A di 0 in U tale che per ogni $x \in A$, $d_x f$ è iniettivo). Allora esiste una carta locale di $\mathbb{R}^k$ intorno a 0, $\phi : U' \to \mathbb{R}^k$, $\phi(0) = 0$, esiste un intorno aperto $U"$ di 0 in U, tali che per ogni $x \in U"$, $\phi \circ f(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$.

• Vale il seguente fatto:
(*) *Supponiamo che U sia convesso (per esempio $U = \mathbb{R}^n, B(0, r)$). Allora esistono applicazioni lisce $g_j : U \to \mathbb{R}^k$, $j = 1, \dots n$, tali che $f(x) = \sum_j g_j(x) x_j$.*

Basta considerare il caso $k = 1$. Allora

$$f(x) = \int_0^t \frac{df(tx)}{dt} dt = \sum_j [\int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_j} dt] x_j$$

e basta porre $g_j(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f(tx)}{\partial x_j} dt$.

• **(Linearizzazione dei diffeomorfismi di $\mathbb{R}^n$ a meno di isotopie)** Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un diffeomorfismo. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $d_x f$ è invertibile. Definiamo $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$:

$$F(x, t) = f(tx)/t, \text{ se } t \neq 0, \ F(x, 0) = d_0 f \ .$$

Ponendo $f_t = F|\mathbb{R}^n \times \{t\}$, vediamo che f_1=f, $f_0 = d_0 f$, f_t è un diffeomorfismo per ogni t. Inoltre $F(x, t)$ è continua in entrambi gli argomenti. In effetti F è liscia; basta osservare che usando il fatto (*) qui sopra, $F(x, t) = \sum_j g_j(tx) x_j$. Diciamo allora che F è una *isotopia liscia* che connette il diffeomorfismo f con l'isomorfismo lineare $d_0 f$.

- L'aperto $GL(n)$ di $M(n)$ formato dalle matrici invertibili è unione degli aperti disgiunti $GL^{\pm}(n)$ formati alle matrici con determinante > 0 o < 0 rispettivamente. Affermiamo che questi aperti sono connessi per archi. Basta verificarlo per $GL^+(n)$. Sia A, $det A > 0$; vediamo intanto che esiste un arco liscio in $GL^+(n)$ che connette A e $A' \in SO(n)$. Indichiamo con $< .,. >_A$ il prodotto scalare definito > 0 su $\mathbb{R}^n$ tale che le colonne di A formano una base ortonormale. Analogamente $< .,. >_I$ indica il prodotto scalare standard. Per ogni $t \in [0, 1]$, consideriamo il prodotto scalare definito positivo $< .,. >_t = t < .,. >_A + (1 - t) < .,. >_I$. Applichiamo l'ortonormalizzazione di G-S alle colonne di A, relativamente ad ogni $< .,. >_t$. Otteniamo allora un arco liscio di matrici A_t tale che $A_1 = A$ e $A_0 = A' \in S0(n)$ come voluto. Infine possiamo verificare che $SO(n)$ è connesso per archi per induzione su $n \geq 1$ e con semplici considerazioni geometriche.

- Torniamo al diffeomorfismo f. Poichè $x \to detd_x f$ è una funzione continua e $\mathbb{R}^n$ è connesso, questa funzione $detdf$ è a valori in uno dei due aperti $GL^{\pm}(n)$. Supponiamo per esempio che $detd_0 f > 0$; allora possiamo connettere $d_0 f$ con I mediante un arco liscio; quindi possiamo completare F di cui sopra ad una isotopia che connette f con Id. Se $detd_0 f < 0$, possiamo connettere f con la riflessione rispetto all'iperpiano delle prime $n-1$ coordinate.

• **(Lemma di Morse)** Consideriamo ora una funzione liscia $f : U \to \mathbb{R}$, $f(0) = 0$. Se $d_0 f \neq 0$, si tratta di un caso particolare della funzione implicita "surgettiva" già considerata. Supponiamo che $d_0 f = 0$. Diciamo allora che 0 è un *punto critico* di f. Sia

$$H_0 f = (\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0))$$

la *matrice Hessiana* di f in 0. E' una matrice simmetrica. Diciamo che il punto critico 0 è *non degenere* se $H_0 f$ è invertibile; in tal caso *l'indice* λ di 0 è per definizione uguale all'*indice di negatività* di $H_0 f$.

- Se $\psi : W \to U$, $\psi(0) = 0$, è una parametrizzazione locale di U intorno a 0, allora 0 é un punto critico non degenere di $f \circ \psi$ dello stesso indice.

Sappiamo dall'algebra lineare che esiste una matrice invertibile P tale che, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$,

$$Q(u) = u^t(P^t H_0 f P)u = -(u_1^2 + \cdots + u_\lambda^2) + (u_{\lambda+1}^2 + \cdots + u_n^2) \ .$$

Il Lemma di Morse afferma che esiste una parametrizzazione locale di U intorno a 0, $\psi : W \to U$, $\psi(0) = 0$, tale che per ogni $y \in W$

$$f \circ \psi(y) = Q(y) \ .$$

A meno di restringere U non è restrittivo assumere che U sia convesso.Poiché $f(0) = 0$ e $d_0 f = 0$, possiamo applicare più volte il fatto (*) qui sopra e ottenere un'espressione di f su U della forma

$$f(x) = x^t H(x) x$$

dove $H(x)$ è una matrice simmetrica le cui entrate sono funzioni lisce, $H(0) = H_0 f$. Eventualmente restringendo ancora U, possiamo assumere che ogni $H(x)$ sia non singolare e di indice uguale a λ. Applicando alla base canonica l'ortogonalizzazione di G-S rispetto ad ogni prodotto scalare definito dalle matrici $H(x)$, otteniamo una funzione liscia $P(x)$ definita su U e a valori in $GL(n)$, tale che $P(0) = P$, per ogni $x \in U$, per ogni $u \in \mathbb{R}^n$, $u^t(P^t(x)H(x)P(x))u = Q(u)$. Definiamo allora su U l'applicazione liscia $\phi(x) = P(x)^{-1}x$. Si verifica che $d_0\phi$ è invertibile, quindi possiamo applicare il teorema della funzione inversa, per cui, restringendo U, possiamo supporre che $y = \phi(x)$ sia un diffeomorfismo. Si verifica infine che

$$f(x) = x^t H(x) x = Q(y)$$

come voluto.