Ing. Biomedica - 2016-17

Analisi I CORSO A
14 Gennaio 2017

File Dispari

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Sia a_n la successione

$$a_n = \left(\frac{1 + e^{n-1}}{e^{n-1}}\right)^{e^{n-1}}$$

Si dica se esiste il limite $L = \lim_{n\to\infty} a_n$ ed in caso affermativo calcolarlo.
SOLUZIONE.
☐Il limite L non esiste
$\boxed{\text{X}}$ Il limite L esiste e vale e
Giustificazione.
$a_n = \left(\frac{1 + e^{n-1}}{e^{n-1}}\right)^{e^{n-1}} = \left(1 + \frac{1}{e^{n-1}}\right)^{e^{n-1}}$ e poiché $\lim_{n\to\infty} e^{n-1} = \infty$ si ha che $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.
(cfr. dispensa LIMSUCC. pag 9).

Esercizio 2. (3 punti)
Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita per induzione nel modo seguente:

$f(0) = 4$
$f(n+1) = 4 + f(n)$

e $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione definita da $g(n) = 4(n+1)$.
Dimostrare per induzione che per ogni $n \geq 0$ $f(n) = g(n)$.
SOLUZIONE.
La proposizione $p(n) : \{f(n) = g(n)\}$ è banalmente vera per $n = 0$. Mostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$.
$f(n+1) = 4 + f(n)$. Per l'ipotesi induttiva si ha $f(n) = g(n)$ e quindi
$f(n+1) = 4 + f(n) = 4 + g(n) = 4 + 4(n+1) = 4(n+2) = g(n+1)$.

Esercizio 3. (4 punti)
Discutere per quali $a, b \in \mathbf{R}$ e $n, m \in \mathbf{Z}$ la funzione $f(x) = ae^{nx} + be^{mx}$ verifica $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$.
SOLUZIONE.
Poiché $f'(x) = nae^{nx} + mbe^{mx}$ si ha $f(0) = a + b$ e $f'(0) = na + mb$.
Le condizioni richieste implicano quindi che a, b, m, n verifichino

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ na + mb = 1 \end{cases}$$

da cui $a = -b$ e $a(n-m) = 1$. Ciò implica che a (e quindi b) e $n - m$ debbono essere diversi da 0 e a (e quindi b) essere l'inverso di un intero. Cioè $a = \frac{1}{k}, b = -\frac{1}{k}, n = m + k$ ove k è un intero non nullo.
Viceversa per ogni scelta di un intero non nullo k, la quaterna (a, b, n, m) con $a = \frac{1}{k}, b = -\frac{1}{k}, n = m + k$ e $m \in \mathbf{Z}$ è tale che la funzione $f(x) = ae^{nx} + be^{mx} = \frac{1}{k}e^{(m+k)x} - \frac{1}{k}e^{mx}$ verifica le condizioni richieste.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (8 punti) Si consideri la formula

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{se } |x| \geq 1 \\ \dfrac{1}{x^2-1} & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

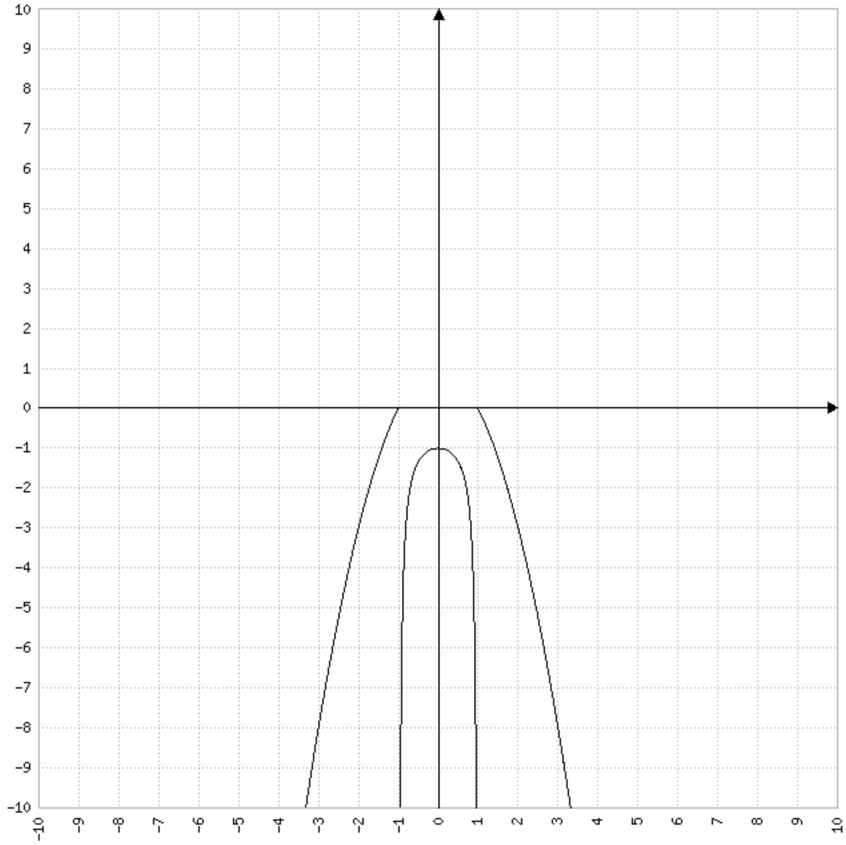
Determinare, se esistono:

a) il più grande sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ tale che la formula definisca una funzione $f : X \to \mathbf{R}$.
b) il più grande sottoinsieme C di X tale che f sia continua su C.
c) il più grande sottoinsieme D di C tale che f sia derivabile su D.
d) i punti di massimo e minimo assoluti di f.
e) i punti di massimo e minimo locali di f.
f) gli eventuali asintoti del grafico di f.

SOLUZIONE.

a) $X = \mathbf{R}$. La funzione risulta definita per ogni $x \in \mathbf{R}$.
b) $C = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. La funzione al di fuori dell'insieme $\{-1, 1\}$ è continua poiché ottenuta con procedimenti che conservano la continuità a partire da funzioni elementari. Nei punti -1 e 1 dove vale 0 invece non è continua poiché $\lim\limits_{x \to -1^+} = -\infty \neq f(-1)$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} = -\infty \neq f(1)$.
c) $D = \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$. Al di fuori dell'insieme $\{-1, 1\}$ la funzione è derivabile poiché ottenuta da funzioni elementari con procedimenti che conservano la derivabilità.
d) I punti di massimo e di minimo assoluto sono:
   .) i punti -1 e 1 sono due punti di massimo assoluto in quanto ivi la funzione vale 0 e sia a sinistra che a destra di tali punti la funzione è negativa.
   .) punti di minimo assoluto non ve ne sono poiché nel suo dominio la funzione tende a $-\infty$;
e) I punti di massimo e di minimo locale sono
   al di fuori dei punti -1 e 1 applicando i procedimenti del calcolo differenziale si vede che il punto 0 è un punto di massimo locale e che non vi sono punti di minimo locale.
f) Gli asintoti della funzione sono le due rette $x = 1$ e $x = -1$ perché $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = -\infty$.

Il comportamento della funzione è riassunto nel grafico seguente.



Esercizio 2. (8 punti) Si consideri la funzione integrale $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt$$

a) Giustificare che F è ben definita.
b) Giustificare che F è derivabile.
   SAMI
c) Dimostrare che F è iniettiva.
d) Dimostrare che F è surgettiva.
e) Dimostrare che la funzione inversa $F^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile e calcolare $(F^{-1})'(0)$.

SOLUZIONE.

a) La funzione F è ben definita in $\mathbf{R}$ poiché la funzione e^{t^2} è continua in tutto $\mathbf{R}$ e quindi verifica le ipotesi del Teorema fondamentale del calcolo integrale. (Dispensa INTEGRAZIONE)
b) La derivata della funzione F, sempre per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, è la funzione e^{x^2}.
c) Essendo la derivata di F sempre positiva, la funzione F risulta sempre crescente e quindi iniettiva: se ci fossero due punti x_1 e x_2 tali che $F(x_1) = F(x_2)$, per il teorema di Rolle, la derivata di F dovrebbe avere uno zero.

d) La surgettività di F deriva dal fatto che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ e dal teorema dei valori intermedi. Infatti se $r \in \mathbf{R}$ il fatto che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ assicura l'esistenza di due punti x_1 e x_2 tali che $F(x_1) > r$ e $F(x_2) < r$. Il teorema dei valori intermedi assicura l'esistenza di x tale che $F(x) = r$.

Per vedere che $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$ si può osservare che $\lim_{x\to+\infty} e^{x^2} = +\infty$ e usare il teorema del valor medio integrale (Lemma 4.1 pag 7 dispensa INTEGRAZIONE) oppure osservare che $e^{x^2} > 1$ da cui $\int_0^x e^{t^2} dt > \int_0^x 1 dt = x$. Per provare che $\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$ si osservi che $\int_0^x e^{t^2} dt = -\int_x^0 e^{t^2} dt$ e da qui si deduce, nel caso che $x \to -\infty$ l'assunto.

e) La funzione inversa $F^{-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è derivabile poiché la derivata della funzione F è in ogni punto diversa da 0. In particolare $(F^{-1})'(0) = \left.\frac{1}{e^{x^2}}\right|_{x=0} = 1$ poiché $F^{-1}(0) = 0$.

Nota La soluzione proposta è di tipo qualitativo poiché, come detto a lezione, la funzione e^{t^2} non è integrabile elementarmente.

Esercizio 3. (4 punti) Si consideri la funzione $e^z : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$.

- Si dica se la funzione è iniettiva
- Si dica se la funzione è surgettiva
- Si dica se esistono numeri z puramente immaginari (cioè del tipo $z = bi$) tali che l'immagine sia un numero reale.
- Determinare la controimmagine di $\mathbf{R}$, cioè $\{z \in \mathbf{C} | e^z \in \mathbf{R}\}$

SOLUZIONE.

- La funzione non è iniettiva: ad esempio $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = e^0 = 1$
- La funzione non è surgettiva: dalla formula di Eulero si vede immediatamente che $e^z \neq 0$ per ogni $z \in \mathbf{C}$.
- Il numero $z = 2\pi i$ fornisce un esempio di numero puramente immaginario la cui immagine è un numero reale.
- La controimmagine di $\mathbf{R}$, cioè $\{z \in \mathbf{C} | e^z \in \mathbf{R}\}$ sono i numeri complessi $z = x + iy$ tali che $\sin y = 0$, quindi i numeri complessi del tipo $z = x + iy$ con x qualsiasi e $y = k\pi$ ove k è un numero intero. Quindi la controimmagine di $\mathbf{R}$ è l'insieme formato da tutte le rette del piano complesso di equazione $y = k\pi$ con k intero.

Esercizio 4. (4 punti)
Si trovino le soluzioni dell'equazione differenziale

$$(x^2 - 5x + 6)y' = 2x - 5$$

tali che $y(0) = 1$.
SOLUZIONE.
L'equazione proposta è chiaramente a variabili separabili e si può integrare calcolando $\displaystyle\int_A^x \frac{2t-5}{t^2-5t+6}dt$.
Pertanto la funzione $\log|x^2 - 5x + 6| + c$ è una soluzione generale.
Nella dispensa EQUADIF1 pag 1 viene fatto osservare che nella definizione di soluzione di una equazione differenziale l'intervallo J di definizione è parte delle incognite del problema e quindi fa parte della soluzione. In questo caso occorre osservare che la funzione che andremo a trovare non è definita per $x = 2$ e $x = 3$.
Per calcolare la costante osserviamo che $y(0) = \log 6$ e quindi $c = 1 - \log 6$.