April 19, 2017

G2-16-17- SPAZI DI FUNZIONI

In questa scheda useremo alcune nozioni introdotte nella scheda sulle 'funzioni a foruncolo'.

Vogliamo costruire una famiglia numerabile di *topologie* su $\mathcal{C}^\infty(M,N)$, indicizzate da $r \in \mathbb{N}$, dove M e N sono varietà lisce di dimensione m e n rispettivamente. Gli spazi ottenuti saranno indicati come $\mathcal{E}^r = \mathcal{E}^r(M,N)$ e a volte $\mathcal{E}^r$ indicherà anche la sola topologia.
Cominciamo con il caso 'locale' dove $M = U$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $N = \mathbb{R}^n$. Per ogni $r \in \mathbb{N}$ definiamo la topologia $\mathcal{E}^r$ specificando una base di intorni per ogni $f = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}^n)$. Questi intorni sono della forma

$$\mathcal{U}(r, f, K, \epsilon)$$

dove gli argomenti variabili sono: $K \subset U$ un sottoinsieme compatto e un reale positivo $\epsilon > 0$. Allora $g \in \mathcal{U}(r, f, K, \epsilon)$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, n$, ogni multi-indice $J = j_1 \dots j_m$ tale che $|J| := j_1 + \cdots + j_m \leq r$, per ogni $x \in K$, si ha che

$$|\frac{\partial^r (g_i - f_i)}{\partial x_1^{j_1} \dots x_m^{j_m}}(x)| < \epsilon \ .$$

Quindi variando gli argomenti possiamo selezionare applicazioni g che sono arbitrariamente "vicine" alla f data con tutte le derivate parziali fino all' ordine r, su un compatto K di U scelto arbitrariamente.
Passiamo al caso generale. Anche in questo caso, per ogni r, specifichiamo una base di intorni di ogni funzione liscia $f : M \to N$. Questi intorni sono ora della forma

$$\mathcal{U}(r, f, (U, \phi), (U', \phi'), K, \epsilon)$$

dove gli argomenti variabili sono: (U, ϕ) una carta dell'atlante massimale di M e (U', ϕ') di quello di N rispettivamente tali che $f(U) \subset U'$, per cui è definita una rappresentazione in coordinate locali $f_{U,U'} := \phi' \circ f \circ \psi : W \to W' \subset \mathbb{R}^n$; $K \subset U$ è un compatto, per cui $K' = \phi(K)$ è un compatto contenuto nell'aperto $W \subset \mathbb{R}^m$; ϵ è come sopra. Allora $g \in \mathcal{U}(r, f, (U, \phi), (U', \phi'), K, \epsilon)$ se e solo se $g(U) \subset U'$ e $g_{U,U'} \in \mathcal{U}(r, f_{U,U'}, K', \epsilon)$.

Possiamo anche definire lo spazio topologico $\mathcal{E}(M,N)$ che ha come famiglia di aperti l'*unione* degli aperti di tutte gli spazi $\mathcal{E}^r(M,N)$ al variare di $r \in \mathbb{N}$. In pratica, lavorando con questa topologia unione, possiamo avere un controllo *uniforme su un arbitrario compatto* di M delle funzioni e delle loro derivate parziali fino ad un ordine che possiamo prefissare arbitrariamente grande (quanto grande sarà specificato di volta in volta a seconda della situazione considerata). Quest'ultima affermazione è chiara se $M = U$ è un aperto di $\mathbb{R}^m$ e $N = \mathbb{R}^n$. Precisiamola in generale. Fissati un arbitrario compatto K di M (non necessariamente contenuto in una carta) e un'applicazione liscia $f : M \to N$, esistono un intorno aperto A di K in M munito di un atlante simpatico $\{U_j, \phi_J\}_{j=1,\dots,s}$ e un insieme di carte $\{(U'_j, \phi'_j)\}$ di N tali che:

- per ogni j, $f(U_j) \subset U'_j$;
- K è contenuto nell'unione delle parti interne B_j dei supporti $K_j \subset U_j$ delle relative funzioni a foruncolo.

Per ogni r, prendendo al variare di $\epsilon > 0$, l' intersezione (finita) degli intorni di f della forma $\mathcal{U}(r, f, (U_j, \phi_j), (U'_j, \phi'_j), K_j, \epsilon)$, $j = 1, \dots, s$, otteniamo un intorno aperto di f; poiché i B_j ricoprono K, una applicazione g che appartenga ad un tale intorno intersezione differisce da f in modo uniformemente controllato su tutto K.

Le topologie $\mathcal{E}^r$, $\mathcal{E}$ così definite sono dette *topologie deboli* su $\mathcal{C}^\infty(M,N)$. Questo sottindende l'esistenza di topologie "forti" $\mathcal{E}^r_F$, $\mathcal{E}_F$. che però non definiamo. Il punto è che i due tipi di topologia coincidono se M è *compatta* e in tutte le applicazioni che vedremo faremo sempre questa ipotesi. Vediamo alcune buone proprietà delle topologie deboli (cioè "forti") quando M è compatta.

• Se M è compatta, nella discussione fatta sopra possiamo prendere il compatto $K = M$ cioè uguale a tutta la varietà. Per ogni r, per ogni $f : M \to N$, gli intorni aperti 'intersezione' visti prima formano una base di intorni aperti di f in $\mathcal{E}^r(M,N)$; prendendone l'unione al variare di r otteniamo una base di intorni di f in $\mathcal{E}(M,N)$. Abbiamo quindi un controllo *uniforme globale* delle applicazioni su *tutta* la varietà M. Se M non è compatta, come già visto si può avere un controllo uniforme su un compatto K di M arbitrariamente "grande" (rispetto alla relazione di ordine data dalla inclusione), ma non essendoci un compatto che ingloba tutta la varietà, non avremo mai un 'controllo all'infinito'. Se M non è compatta, la topologia "forte" è molto più fine di quella debole e realizza appunto un tale 'controllo all'infinito'.

• Se M è compatta sappiamo che può essere realizzata come sottovarietà $M \subset \mathbb{R}^k$, per qualche k. Sappiamo anche che ogni $f : M \to \mathbb{R}^h$ liscia si può estendere ad una funzione liscia $\hat{f}$ definita su tutto $\mathbb{R}^k$, a supporto compatto. Indichiamo con $\mathcal{E}^r_C(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^h)$ il sottospazio di $\mathcal{E}^r(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^h)$ formato dalle applicazioni a supporto compatto. Quindi per *restrizione* è definita per ogni r un'applicazione surgettiva

$$\mathcal{E}^r_C(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^h) \to \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}^h)\ .$$

Si verifica che la topologia quoziente coincide con la topologia $\mathcal{E}^r(M,\mathbb{R}^n)$. In pratica per ogni $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R}^h)$, per ogni estensione $\hat{f}$ di f come sopra, facendo variare ϵ, la restrizione degli intorni aperti di $\hat{f}$ in $\mathcal{E}^r_C(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^h)$ della forma $\mathcal{U}(r,\hat{f},M,\epsilon)$ fornisce una base di intorni di f in $\mathcal{E}^r(M,\mathbb{R}^h)$. Se N è realizzata in $\mathbb{R}^h$, possiamo estendere la discussione precedente a $\mathcal{E}^r(M,N)$, a partire dal sottospazio di $\mathcal{E}^r_C(\mathbb{R}^k,\mathbb{R}^h)$ formato dalle applicazioni tali che l'immagine di M sia contenuta in N.

• Se M è compatta, allora per ogni r, $\mathcal{E}^r(M,\mathbb{R}^h)$ è metrizzabile. Fissiamo un embedding $M \subset \mathbb{R}^k$. Per ogni $f,g : M \to \mathbb{R}^h$, basta porre

$$d_r(f,g) = \sup_{i=1,\dots,h;J\leq r;x\in M}(||\frac{\partial^J(\hat{g}-\hat{f})}{\partial x_1^{j_1}\dots\partial x_k^{j_k}}(x)||$$

che è in effetti un massimo per la compattezza di M e la continuità delle derivate parziali. La cosa si può estendere facilmente a $\mathcal{E}^r(M,N)$ almeno nel caso in cui $N \subset \mathbb{R}^h$.

• Supponiamo che per tale $N \subset \mathbb{R}^h$ come sopra, esista un intorno aperto U_N di N in $\mathbb{R}^h$ munito di una 'proiezione' liscia $\pi_N : U_N \to N$ tale che $\pi_N(p) = p$ per ogni $p \in U_N$ (vedremo che tale $\pi_N : U_N \to N$ esiste sempre almeno se N è compatta). Allora se M è compatta, per ogni r, per ogni $f \in \mathcal{E}^r(M,N)$ esite un intorno $\mathcal{U}$ di f tale che per ogni $g \in \mathcal{U}$, f e g *sono omotope*. Infatti, possiamo scegliere $\mathcal{U}$ tale che per ogni $x \in M$, per ogni $g \in \mathcal{U}$ il segmento in $\mathbb{R}^h$ che unisce $f(x)$ e $g(x)$ sia contenuto in U_N. Allora ponendo $f_t(x) = \pi_N((1-t)f(x) + tg(x))$ otteniamo una omotopia voluta.

Osservazione. Quando M non è compatta la topologia forte non gode di simili 'buone' proprietà. Per esempio $\mathcal{E}^r(M,\mathbb{R})$ non è 1-numerabile (quindi non è metrizzabile); se $f_n \to f$ in $\mathcal{E}^r(M,\mathbb{R})$, allora esiste un compatto K di M tale che la successione f_n è *definivamente uguale a* f fuori di K. Le topologie forti godono però in modo non ovvio della seguente importante *proprietà di Baire*:

"L'intersezione di un insieme numerabile di aperti densi è densa".

Nel caso in cui M è compatta sarà sufficiente per le applicazioni usare la seguente versione immediata (in parte più debole in parte più forte) di questa proprietà:

" L'intersezione di un insieme *finito* di aperti densi è un aperto denso."

Vale la seguente proposizione.

Proposizione. *Se M è compatta, le immersioni, le summersioni, gli embedding e i diffeomorfismi rispettivamente formano sottoinsiemi aperti di $\mathcal{E}^r(M,N)$ (che possono anche essere vuoti).*

Dim. Basta dimostrare la proposizione per $r = 1$. In coordinate locali, il fatto che f sia una immersione o una summersione si traduce nel fatto che il differenziale d_xf ha in ogni punto rango massimo, cioè esiste un minore quadrato di taglia $q \times q$, $q = \min\{m,n\}$, di determinante non nullo. Basta mostrare che questa è una condizione aperta per $r = 1$. Usando atlanti simpatici adattati ad f come sopra, per permanenza del segno, per ogni j esiste un intorno $\mathcal{U}(1,f,(U_j,\phi_j),(U'_j,\phi'_j),K_j,\epsilon)$ tale che per ogni g in quell'intorno $d_x g_{U,U'}$ ha quella proprietà per ogni $x \in K_j$. Prendendo l'intersezione di tali intorni si trova un intorno di f formato da immersioni o summersioni rispettivamente. Se f è un embedding basta mostrare che esiste un intorno intersezione come sopra formato da immersioni iniettive. Procediamo per assurdo. Fissiamo la successione $\epsilon_n = 1/n$. Se la tesi non fosse vera esiterebbero una successione di intorni intersezione $\mathcal{U}_n$ di f in $\mathcal{E}^1(M,N)$, una successione $g_n \in \mathcal{U}_n$ e una successione di coppie di punti $x_n \neq y_n \in M$ tali che ogni $\mathcal{U}_n$ è formato di immersioni, $g_n(x_n) = g_n(y_n)$. Usando la compattezza di M, possiamo supporre che $x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$. Poichè $g_n \to f$ uniformemente, allora $g_n(x_n) = g_n(y_n) \to f(x_0) = f(y_0)$, per cui $x_0 = y_0$ perché f è iniettiva. Non è allora restrittivo supporre che x_n e y_n siano (definitivamente) in una stessa carta U_j. Passando alla rappresentazione in coordinate locali $f_{U,U'}$, Per compattezza di S^{n-1} possiamo supporre che i vettori unitari $v_n := \dfrac{x_n - y_n}{||x_n - y_n||} \to v \in S^{n-1}$ (abbiamo fatto l'abuso di continuare a chiamare x_n, y_n le rispettive immagini in $\mathbb{R}^n$ tramite ϕ_j). Considerando lo sviluppo di Taylor al primo ordine abbiamo che

$$(g_n(x_n) - f(x_0)) + d_{x_0} g_n(v_n) \to 0$$

quindi

$$d_{x_0} g_n(v_n) \to 0$$

mentre si ha anche

$$d_{x_0} g_n(v_n) \to d_{x_0} f(v)$$

ma questo è assurdo perché essendo f una immersione, allora $d_{x_0} f$ è iniettivo. Infine se f è un diffeomorfismo, in particolare è un embedding; prendiamo un intorno fatto di embedding g come sopra. Basta dimostrare che essi sono anche surgettivi. Ogni componente connessa M' di M viene mandata da g in una componente connessa N' di N. Basta dimostrare che ogni $N' = g(M')$. Infatti $g(M')$ è aperta perché g è un diffeomorfismo locale, è anche chiusa perché $g(M')$ è compatta.

□