February 27, 2017

G2-16-17: ALCUNE NOZIONI DI TOPOLOGIA GENERALE

• Una *topologia* τ su un insieme X è un insieme di sottoinsiemi di X tale che

(1) $\emptyset$ e X appartengono a τ;
(2) Ogni unione di elementi di τ appartiene a τ;
(3) L'intersezione di due elementi di τ appartiene a τ.

(X, τ) è detto uno *spazio topologico*. Spesso τ è sottintesa. Gli elementi di τ sono per definizione gli insiemi *aperti* della topologia. Un sottoinsieme di (X, τ) è *chiuso* se il suo complementare è aperto.

• Date due topologie τ e τ' su X, diciamo che *τ è più fine di τ'* se $\tau' \subset \tau$. La topologia *banale* $\tau_B = \{\emptyset, X\}$ è la meno fine tra tutte le topologie su X; la topologia *discreta* τ_D per cui ogni sottoinsieme di X è aperto, è la più fine tra tutte le topologie.

• Ogni sottoinsieme Y di (X, τ) eredita una topologia $\tau_Y = \{A \cap Y;\ A \in \tau\}$; (Y, τ_Y) è un *sottospazio topologico* di (X, τ).

• Dato un sottoinsieme Y dello spazio topologico X, l'intersezione $\bar{Y}$ di tutti i chiusi di X che contengono Y è il più piccolo chiuso che contiene Y, cioè se $Y \subset F \subset \bar{Y}$ ed F è chiuso, allora $F = \bar{Y}$. Infatti: $\bar{Y}$ è chiuso perché il suo complementare è l'unione di tutti gli aperti di X che non intersecano Y; se F è come sopra allora appartiene alla famiglia di chiusi la cui intersezione è $\bar{Y}$, quindi $\bar{Y} \subset F$ ed infine $F = \bar{Y}$. L'insieme $\bar{Y}$ è detto la *chiusura di Y*. Un sottoinsieme Y di X è *denso* se $\bar{Y} = X$. Per esempio è ben noto che $\mathbb{Q}$ è denso in $(\mathbb{R}, \tau_E)$; in generale $\mathbb{Q}^n$ è denso in $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ (la topologia euclidea τ_E è definita in seguito).

L'unione $\mathrm{Int}(Y)$ di tutti gli aperti di X contenuti in Y è il più grande aperto contenuto in Y; è detta la *parte interna di Y*. Può essere vuota. Un punto è interno a Y se appartiene alla parte interna. $F(Y) = \bar{Y} \setminus \mathrm{Int}(Y)$ è detto la *frontiera* di Y.

Y è chiuso se coincide con la sua chiusura; è aperto se coincide con la sua parte interna.

• Un insieme U è un *intorno* di $x \in X$ se x è interno a U. Un punto x dello spazio topologico X è di *accumulazione* per il sottoinsieme Y se per ogni intorno U di x in X, $(U \setminus \{x\}) \cap Y$ non è vuoto.

$\bar{Y}$ consiste dell'unione di Y e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione: indichiamo con Z tale unione; per dimostrare che $\bar{Y} \subset Z$, basta dimostrare che Z è un chiuso di X, cioè che il suo complementare è aperto, cioè che per ogni x nel complementare di Z, esiste un intorno aperto U di x in X che non interseca Z. Dimostriamolo per assurdo. Se $z \in Z \cap U$ e non appartiene a Y, allora U è un intorno di z che è di accumulazione per Y, quindi $U \cap (Y \setminus \{z\}) \neq \emptyset$; ne segue che ogni intorno aperto di x interseca Y, x è di accumulazione per Y e sta contemporaneamente in Z e nel suo complementare, cosa assurda. Per dimostrare che $Z \subset \bar{Y}$, basta verificare che se F è un chiuso che contiene Y e x è di accumulazione per Y, allora $x \in F$. Infatti, se questo non fosse vero x starebbe nell'aperto complementare di F, quindi esisterebbe un intorno aperto U di x che non interseca F e, a maggior ragione, non interseca $Y \subset F$, per cui x non sarebbe di accumulazione per Y, contro l'ipotesi.

• **Spazi metrizzabili.** Ad ogni *spazio metrico* (X, d), cioè ad ogni insieme X munito di una *distanza* d, è associato in modo naturale uno spazio topologico (X, τ_d). Per definizione $U \in \tau_d$, cioè è un aperto di questa topologia, se per ogni $x \in U$ esiste una *palla "aperta" di centro x e raggio $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$* cioè della forma

$$B(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) < r\}$$

che sia tutta contenuta in U. Segue dalla definizione che ogni aperto di τ_d è unione di palle "aperte". Si verifica inoltre che ogni tale palla "aperta" è in effetti un aperto di τ_d: sia $z \in B(x, r)$; se $z = x$ chiaramente $B(x, r) \subset B(x, r)$. Altrimenti, poniamo $r' = (1/2)\min(d(x, z), r - d(x, z)) > 0$, allora $B(z, r') \subset B(x, r)$. Infatti per ogni $y \in B(z, r')$, applicando la disuguaglianza triangolare, $d(y, x) \leq d(y, z) + d(z, x) < r$.

In generale una famiglia di aperti di uno spazio topologico tale che ogni aperto non vuoto è unione di aperti della famiglia è detta una *base di aperti.* Dunque τ_d è definita dal fatto che le palle "aperte" formano una base di aperti.
Uno spazio topologico (X, τ) è *metrizzabile* se $\tau = \tau_d$ per qualche distanza d du X. Due distanze d, d' su X sono *topologicamete equivalenti* se $\tau_d = \tau_{d'}$.

Esempi. (1) La *topologia euclidea* τ_E su $\mathbb{R}^n$ è quella indotta dalla distanza euclidea

$$d_E(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)_E}$$

dove $(.,.)_E$ è il prodotto scalare definito positivo standard su $\mathbb{R}^n$.

(2) Ogni distanza d su $\mathbb{R}^n$ definita come sopra utilizzando un *arbitrario* prodotto scalare definito positivo $(.,.)$ su $\mathbb{R}^n$ è topologicamente equivalente alla distanza euclidea: dati due punti x_1 e x_2 di $\mathbb{R}^n$, le palle aperte (per entrambe le distanze d_E e d) di centro x_1 vengono traslate nelle palle aperte di centro x_2. Basta allora dimostrare che per ogni $r > 0$ esiste $r' > 0$ tale che $B_E(0, r') \subset B(0, r)$ (rispettivamente $B(0, r') \subset B_E(0, r)$). Questo può essere verificato, per esempio, come applicazione del *teorema spettrale* euclideo.

(3) La formula $d(x, y) = \max\{|x_j - y_j|;\ j = 1, \ldots, n\}$, definisce una distanza su $\mathbb{R}^n$ topologicamente equivalente a d_E.

(4) La topologia discreta (X, τ_D) è metrizzabile mediante la distanza discreta $d_D(x, y) = 0$ (resp. $= 1$) se $x = y$ (resp. $x \neq y$).

• **(Applicazioni continue e omeomorfismi)** Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è *continua* se per ogni aperto A di Y, la contro-immagine $f^{-1}(A)$ è un aperto di X. f è un *omeomorfismo* se è continua, invertibile e con inversa continua. In generale l'inversa di una funzione continua invertibile non è continua; ad esempio consideriamo $X = \{0\} \cup (1, 2)$, $Y = [1, 2)$ (considerati come sottospazi di $(\mathbb{R}, \tau_E)$), $f : X \to Y$, $f(0) = 1$, $f(x) = x$ per ogni $x \in (1, 2)$.
Siamo interessati a individuare proprietà degli spazi topologici che siano invarianti per omeomorfismi.

• **(Una proprietà di separazione)** Uno spazio topologico X è detto *di Hausdorff* (brevemente, "T_2") se per ogni coppia di punti $x \neq y \in X$ esistono rispettivi intorni U_x e U_y in X tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Ogni spazio metrizzabile è T_2: se $\tau = \tau_d$ e $d(x, y) = r > 0$, allora $B(x, r/3) \cap B(y, r/3) = \emptyset$.

Se X è T_2 allora ogni punto x è chiuso: in effetti per questo basta la proprietà più debole (detta "T_1") che per ogni $y \neq x$ esista un intorno U_y di y che non contenga x. Per esempio, la topologia τ_Z su $\mathbb{R}$, meno fine di τ_E, che ha come aperti non vuoti i complementari dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$, non è T_2 ma tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono chiusi rispetto a τ_Z.

Se X è T_2 e $x \in X$ è di accumulazione per il sottoinsieme Y, allora ogni intorno di x in X interseca Y in infiniti punti: supponiamo per assurdo che esista un intorno U di x che intersechi $Y \setminus \{x\}$ in un insieme finito $\{y_1, \ldots, y_k\}$. Poiché X è T_2, è facile vedere per induzione che esistono un intorno W di x, ed intorni W_j di y_j due a due disgiunti, tali che $W \cap W_j = \emptyset$, $j = 1, \ldots, k$. Quindi $W' = W \cap U$ è un intorno di x tale che $W' \cap (Y \setminus \{x\}) = \emptyset$, contro il fatto che x è di accumulazione per Y.

La proprietà T_2 passa ai sottospazi ed è invariante per omeomorfismi: lasciamo la verifica per esercizio.

• **(Proprietà di numerabilità)** Dati uno spazio topologico X, $x \in X$, una *base di intorni di x* è una famiglia di intorni di x in X tale che per ogni intorno U di x esiste un elemento W della famiglia tale che $W \subset U$. Uno spazio X è 1-*numerabile* se per ogni $x \in X$, esiste una successione di intorni di x, $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, che costituisce una base di intorni di x. X è 2-*numerabile* se esiste una successione di aperti di X, $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, che costituisce una base di aperti di X.

Se X è 1-numerabile, allora ogni $x \in X$ ha una base di intorni numerabile $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, tale che $U_{n+1} \subset U_n$: presa una base di intorni numerabile $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, basta considerare le intersezioni $U_n = \cap_{j=0,\ldots,n} W_j$).

Se X è 2-numerabile allora è 1-numerabile: se $\mathcal{B}$ è una base numerabile di aperti, per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ formata dagli elementi di $\mathcal{B}$ che contengono x è una base numerabile di intorni di x.

Se X è metrizzabile allora è 1-numerabile: se d è una distanza che metrizza lo spazio, allora per ogni x, la famiglia delle palle aperte (rispetto a d) $\{B(x, 2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base numerabile di intorni.

Se X è metrizzabile ed esiste un sottoinsieme $Y = \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ numerabile e denso in X, allora X è 2-numerabile: la famiglia numerabile di palle aperte $B(y_n, 2^{-n})$, $n \in \mathbb{N}$, è una base di aperti. Per esempio $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è 2-numerabile; infatti è metrizzabile e $\mathbb{Q}^n$ è un sottoinsieme denso numerabile.

Esempi di spazi non metrizzabili. Se X ha più di un elemento, allora la topologia banale su X non è metrizzabile perché non è T_2. Ecco un altro esempio più interessante. La topologia τ_S su $\mathbb{R}$, più fine di τ_E, che ha come base di aperti gli intervalli semi-aperti della forma $[a, b)$ verifica le seguenti proprietà (la cui verifica è lasciata per esercizio):

(1) E' T_2;
(2) E' 1-numerabile;
(3) $\mathbb{Q}$ è denso in $(\mathbb{R}, \tau_S)$;
(4) Non è 2-numerabile
(5) Non è metrizzabile.

Le proprietà di numerabilità passano ai sottospazi e sono invarianti per omeomorfismi: anche queste verifiche sono lasciate per esercizio.

• **(Connessione)** Uno spazio topologico X è *connesso* se X è l'unico sottoinsieme non vuoto che sia contemporaneamente aperto e chiuso. Quindi X *non* è connesso se $X = A \cup A'$ dove A e A' sono aperti non vuoti tali che $A \cap A' = \emptyset$. Un sottoinsieme Y di X è connesso se lo è in quanto sottospazio topologico.

Un sottoinsieme non vuoto Y di $(\mathbb{R}, \tau_E)$ è connesso se e solo se è un intervallo: questo è un risultato fondamentale, probabilmente già visto in qualche corso di Analisi, che merita comunque di essere richiamato con cura. Ricordiamo che un sottoinsieme non vuoto J di $\mathbb{R}$ è un intervallo se verifica la seguente proprietà: se $x, y \in J$ e $x < y$, allora ogni $z \in \mathbb{R}$ tale che $x < z < y$ appartiene a J (diremo equivalentemente che $[x, y] \subset J$). Se Y non è un intervallo, allora esistono $x < y$ in Y e z tale che $x < z < y$ e z non appartiene a Y. Allora $A_+ = \{x \in Y;\ x > z\}$, $A_- = \{x \in Y;\ x < z\}$ sono due aperti non vuoti disgiunti di Y che lo ricoprono, quindi Y non è connesso. Viceversa, supponiamo che Y sia un intervallo e che, per assurdo, non sia connesso, cioè $Y = A_1 \cup A_2$ dove A_1 e A_2 sono aperti non vuoti e disgiunti. Non è restrittivo supporre (se necessario scambiando l'ordine) che esistano $x_1 \in A_1$, $x_2 \in A_2$, $x_1 < x_2$. Quindi $[x_1, x_2] \subset Y$. Sia ora $z = \sup([x_1, x_2] \cap A_1)$. Chiaramente $z \in [x_1, x_2]$ perché quest'ultimo intervallo è un chiuso, quindi $z \in Y$. Il punto $z \in \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2$. Infatti è un punto di accumulazione di A_1 in quanto estremo superiore di un sottoinsieme di A_1; se $z \neq x_2$ allora è un punto di accumulazione di $(z, x_2] \subset A_2$. Ne segue che il punto z non può appartenere all'aperto A_1 perché $A_1 \cap \bar{A}_2 = \emptyset$; analogamente z non può appartenere all'aperto A_2, ma questo è assurdo perché $z \in Y = A_1 \cup A_2$.

Se $f : X \to X'$ è continua e X è connesso allora anche l'immagine $f(X)$ è connessa. In particolare la connessione è una proprietà invariante per omeomorfismi: se per assurdo $f(X) = B_1 \cup B_2$, con B_1 e B_2 aperti non vuoti disgiunti, allora, per la continuità della funzione, X è unione degli aperti non vuoti e disgiunti $f^{-1}(B_i)$, $i = 1, 2$.

• **(Connessione per archi)** Un *arco in X* (a volte detto anche "un cammino") è un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \to X$, dove l'intervallo è considerato come un sottospazio di $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Posto $x_j = \gamma(j)$, $j = 0, 1$, diciamo che l'arco γ unisce i punti x_0 e x_1 di X. X è detto *connesso per archi* se per ogni coppia x, y di punti di X questi sono uniti da un arco in X. Evidentemente ogni intervallo di $(\mathbb{R}, \tau_E)$ è connesso per archi.

Se X è connesso per archi, allora è connesso: supponiamo che $X = A_1 \cup A_2$ non sia connesso. Sia $x_j \in A_j$ e γ un arco in X che unisce x_1 e x_2. Allora $[0, 1]$ sarebbe l'unione dei due aperti non vuoti disgiunti $\gamma^{-1}(A_j)$, contro il fatto che l'intervallo $[0, 1]$ è connesso.

Se $f : X \to X'$ è continua e X è connesso per archi allora anche l'immagine $f(X)$ è connessa per archi. In particolare la connessione per archi è una proprietà invariante per omeomorfismi: se

$y_0, y_1 \in f(X)$ siano $f(x_j) = y_j$ e γ un arco in X che unisce x_0 e x_1. Allora $f \circ \gamma$ è un arco in $f(X)$ che unisce y_0 e y_1.

"Essere uniti da un arco in X" definisce in generale una relazione di equivalenza su X. Le classi di equivalenza (considerate come sottoinsiemi di X) sono dette le componenti connesse per archi di X. *X è connesso per archi se e solo se ha una sola componente connessa (p.a.).* La verifica di queste affermazioni è lasciata per esercizio.

Ogni aperto non vuoto connesso A di $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è connesso per archi: basta dimostrare che ogni componente connessa per archi di A è un aperto; poiché le componenti connesse per archi sono due a due disgiunte e l'unione di aperti è un aperto, ne segue che ogni componente connessa è anche un chiuso, dunque ne esiste una sola perché A è connesso. D'altra parte se la palla $B(x,r)$ è contenuta nell'aperto A, allora essa è contenuta nella componente connessa per archi di x perché x e ogni altro punto $y \in B(x,r)$ possono essere uniti per mezzo di un cammino radiale contenuto nella palla; questo basta per concludere che ogni componente è un aperto.

In generale un insieme connesso non è connesso per archi: un esempio è fornito dal sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ definito da

$$Y = \{(0,y);\ -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x));\ x > 0\}\ .$$

La verifica, non ovvia, che è connesso ma non è connesso per archi è lasciata come esercizio un po' impegnativo.

• **(Compattezza)**
Convenzione: Trattando qui di seguito le varie nozioni di compattezza, assumeremo sempre che gli spazi topologici considerati siano T_2.

Uno spazio topologico X è *compatto* se per ogni *ricoprimento aperto di X* (cioè una famiglia di aperti $\{A_j\}_{j\in J}$ - J arbitrario insieme di indici - tale che $X = \cup_{j\in J} A_j$) esiste un *sottoricoprimento finito* (cioè esiste $B \subset J$ finito tale che $X = \cup_{j\in B} A_j$). Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X è compatto se lo è in quanto sottospazio topologico.

Un sottoinsieme Y di uno spazio compatto X è compatto se e solo se è chiuso: supponiamo che Y sia chiuso; sia $\{A_j\}_{j\in J}$ un ricoprimento aperto di Y. Per la definizione della topologia indotta, esiste una famiglia $\{\tilde{A}_j\}_{j\in J}$ di aperti di X, tali che per ogni j, $A_j = \tilde{A}_j \cap Y$. Allora aggiungendo l' aperto $X \setminus Y$ a questa famiglia otteniamo un ricoprimento aperto di X. Per compattezza di X esiste un sottoricoprimento finito; infine le intersezioni con Y forniscono un sottoricoprimento finito dell' iniziale ricoprimento aperto di Y. Viceversa, supponiamo che Y sia compatto e dimostriamo che il suo complementare è aperto. Sia $x \in X \setminus Y$. Per la proprietà T_2, per ogni $y \in Y$ esistono intorni aperti disgliunti U_y di y e W_y di x rispettivamente. Variando y si ottiene un ricoprimento aperto di Y. Per compattezza di Y esiste un sottoricoprimento finito $U_{y_1}, \dots, U_{y_k}$ di Y. Allora $W = \cap_{j=1}^k W_{y_j}$ è un intorno aperto di x contenuto in $X \setminus Y$.

Se X è compatto e $Y \subset X$ è infinito allora Y ha punti di accumulazione: se non ne avesse Y sarebbe un chiuso (quindi compatto) di X con topologia indotta discreta; la famiglia dei punti di Y è un ricoprimento aperto; poiché se ne può estrarre un sottoricoprimento finito, necessariamente Y sarebbe finito, contro l'ipotesi.

Se $f : X \to X'$ è continua, X è compatto e X' è T_2, allora anche l'immagine $f(X)$ è un compatto. Ne segue che la compattezza è invariante per omeomorfismi: dato un ricoprimento aperto $\{A_j\}_{j\in J}$ di $f(X)$, per continuità della funzione $\{f^{-1}(A_j)\}_{j\in J}$ è un ricoprimento aperto di X; per compattezza di X esiste un sottoricoprimento finito la cui immagine è un sottoricoprimento finito dell'iniziale ricoprimento aperto di $f(X)$.

Se nelle ipotesi precedenti supponiamo inoltre che f sia iniettiva, allora $f : X \to f(X)$ è un omeomeorfismo: basta dimostrare che f manda chiusi di X in chiusi di $f(X)$; un chiuso Y in X è compatto perché X è compatto, quindi $f(Y)$ è un compatto in $f(X)$ perchè f è continua, quindi $f(Y)$ è chiuso in $f(X)$ perché $f(X)$ è compatto.

(Compattezza per successioni) Una successione $a : \mathbb{N} \to X$ converge a $x \in X$ se per ogni intorno U di x in X, a_n appartiene *definitivamente* a U. Poiché consideriamo spazi T_2, ogni successione convergente ha un unico punto limite.

Se X è 1-numerabile, Y è un sottoinsieme di X, allora $x \in X$ appartiene alla chiusura di $\bar{Y}$ di Y se e solo se esite una successione $a : \mathbb{N} \to Y$ che converge a x. Il punto x è di accumulazione per Y se e solo se esite una successione $a : \mathbb{N} \to Y \setminus \{x\}$ che converge a x: la dimostrazione è lasciata per esercizio.

Uno spazio topologico X è *compatto per successioni* se per ogni successione $a : \mathbb{N} \to X$ esiste una *successione estratta* (cioè della forma $a \circ b$ dove $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente) convergente ad un punto x di X. Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X è compatto per successioni se lo è con la topologia di sottospazio.

Ogni intervallo chiuso e limitato di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è compatto per successioni: si tratta di un risultato fondamentale sicuramente già incontrato nei corsi di Analisi.

Se X è compatto per successioni, $f : X \to Y$ è continua e Y è T_2, allora $f(X)$ è compatta per successioni. Ne segue che la compattezza per successioni è una proprietà invariante per omeomorfismi.

Se X è compatto e 1-numerabile, allora è compatto per successioni: se una successione ha immagine finita, allora almeno un valore è preso infinite volte e quindi si può estrarre una successione che prende costantemente quel valore. Se una successione ha immagine infinita questa ha un punto di accumulazione x. Sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni di x tale che $U_{n+1} \subset U_n$. Sia n_0 il minimo indice per cui a_{n_0} appartiene a U_0; sia n_1 il minimo indice tale che $n_1 > n_0$ e a_{n_1} appartiene a U_1 (questo esiste perchè essendo lo spazio T_2, U_1 interseca l'immagine della successione in infiniti punti); continuando così per induzione, estraiamo una successione a_{n_j} che converge a x.

Se X è compatto per successioni e 2-numerabile, allora è compatto: dimostriamo intanto che ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A} = \{A_j\}_{j\in J}$ ammette sottoricoprimenti al più numerabili. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X. Sia $\mathcal{B}'$ la sottofamiglia di $\mathcal{B}$ formata dagli aperti della base che sono contenuti in qualche $A_j \in \mathcal{A}$. Poiché quest'ultimi ricoprono X e ogni A_j è unione di elementi di $\mathcal{B}$, ne segue che $\mathcal{B}'$ è un ricoprimento al più numerabile di X. Per ogni $B \in \mathcal{B}'$ selezioniamo un $A_{j_B} \in \mathcal{A}$ che contenga B. Eliminando le eventuali ripetizioni, la sottofamiglia di $\mathcal{A}$ così ottenuta è un sottoricoprimento al più numerabile di X. Basta ora dimostrare che ogni ricoprimento aperto numerabile $\mathcal{A} = \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette un sottoricoprimento finito. Se per assurdo non esistesse, potremmo costruire per induzione una successione a_n di punti di X da cui non si può estrarre alcuna successione convergente, contro l'ipotesi.

Se X è 2-numerabile, allora X è compatto se e solo se è compatto per successioni: è una conseguenza immediata dei fatti visti sopra.

Un sottoinsieme Y di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato: poiché lo spazio $\mathbb{R}^n$ è 2-numerabile, è equivalente ragionare in termini della compattezza per successioni. Se un sottoinsieme Y non è limitato è possibile costruire una successione di punti di Y che diverge. Se è limitato è contenuto in un prodotto T di intervalli chiusi e limitati, cioè compatti. Per estrazioni successive componente per componente, da ogni successione a valori in Y si estrae una successione convergente ad un punto x di T; infine $x \in Y$ perché Y è chiuso.

$(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è localmente compatto*, cioè ogni punto ha una base di intorni compatti*: per ogni x basta prendere per esempio la famiglia delle palle chiuse di centro x.

Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e X è compatto, allora X ha un punto di minimo assoluto e un punto di massimo assoluto per la funzione f: l'immagine di f è chiusa e limitata, quindi ha un massimo e un minimo e questi valori sono presi tramite f da qualche punto di X.

• **(Spazi metrizzabili compatti)**
Ricordiamo alcune nozioni sugli spazi metrici (X, d) sicuramente già incontrate nei corsi di Analisi:

- Se una successione in (X, d) è convergente, allora è necessariamente una successione di Cauchy.
- (X, d) è uno spazio metrico *completo* se ogni successione di Cauchy è convergente.

- Se una successione di Cauchy in (X, d) ammette una successione estratta convergente, allora è essa stessa convergente.

Dato uno spazio metrico (X, d) questo si dice *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme finito di palle aperte di raggio ϵ che ricoprono X.

Se X è metrizzabile per mezzo della distanza d ed è compatto per successioni, allora (X, d) è totalmente limitato: altrimenti esisterebbe un $\epsilon > 0$ tale che dato un punto arbitrario x_0 di X esisterebbero x_1 tale che $d(x_0, x_1) > \epsilon$, x_2 tale che $d(x_0, x_2) > \epsilon$ e $d(x_1, x_2) > \epsilon$, $\dots$, continuando per induzione si otterebbe una successione di punti di X da cui non si può estrarre alcuna successione di Cauchy, quindi alcuna successione convergente.

Se X è metrizzabile per mezzo della distanza d ed è compatto per successioni, allora per ogni ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ di X esiste $\epsilon > 0$ tale che ogni palla aperta di (X, d) di raggio ϵ è contenuta in qualche $A \in \mathcal{A}$; tale ϵ è detto un numero di Lebesgue *di $\mathcal{A}$*: per ogni $x \in X$ esiste $\epsilon > 0$ tale che la palla $B(x, \epsilon)$ è tutta contenuta in qualche $A \in \mathcal{A}$; sia ϵ_x l'estremo superiore di tali ϵ. Basta dimostrare che $\inf\{\epsilon_x;\ x \in X\} > 0$. Sia per assurdo x_n una successione di punti di X tale che $\epsilon_n := \epsilon_{x_n} \to 0$. A meno di estrarre una sottosuccessione, possiamo assumere che x_n converga ad un punto $x \in X$; quindi definitivamente $d(x_n, x) < \epsilon_x/3$, la palla $B(x_n, \epsilon_x/3)$ è definitivamente contenuta in $B(x, \epsilon_x)$ quindi in qualche $A \in \mathcal{A}$. Si conclude che definitivamente $\epsilon_n \geq \epsilon_x/3$. Assurdo.

Si osserva che se $\epsilon > 0$ è un numero di Lebesgue per il ricoprimento aperto $\mathcal{A}$ e $\epsilon > \epsilon' > 0$, allora anche ϵ' lo è.

Se X è metrizzabile e compatto per successioni, allora è 2-numerabile: sia d una distanza che metrizza la topologia; poiché la compattezza per successioni implica che lo spazio è totalmente limitato, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una famiglia finita $\mathcal{B}_n$ di palle aperte di raggio uguale a 2^{-n} che ricoprono X. Allora $\mathcal{B} = \cup_n \mathcal{B}_n$ è una base numerabile di aperti di X. Infatti sia A un aperto di X, $x \in A$ e consideriamo il ricoprimento aperto di X formato da A e da $X \setminus \{x\}$. Esiste $\bar{n}$ abbastanza grande tale che $2^{-\bar{n}}$ sia un numero di Lebesgue per tale ricoprimento. Allora ogni palla di $\mathcal{B}_{\bar{n}}$ è interamente contenuta in uno dei due aperti; quelle che contengono x sono interamente contenute in A, quindi A è unione di palle di $\mathcal{B}$.

Se X è metrizzabile, allora è compatto se e solo se è compatto per successioni: segue dai fatti precedenti ricordando che le due nozioni di compattezza sono equivalenti per gli spazi 2-numerabili.

Se X è metrizzabile per mezzo della distanza d, allora X è compatto se e solo se lo spazio metrico (X, d) è completo e totalmente limitato: la dimostrazione che lasciamo per esercizio segue come corollario dei fatti visti sopra.

• **(Topologia prodotto)** Siano X_1 e X_2 spazi topologici. Consideriamo l'insieme prodotto $X_1 \times X_2$ munito delle due proiezioni p_1 e p_2 sui fattori X_1 e X_2 rispettivamente . La *topologia prodotto* $\tau_1 \times \tau_2$ su $X_1 \times X_2$ è definita come la topologia *meno fine* tra quelle che rendono le due proiezioni continue. Si ottiene così lo *spazio topologico prodotto*. La verifica delle seguenti affermazioni è lasciata per esercizio.

- La nozione si estende al prodotto di un numero finito di spazi topologici. In particolare $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è lo spazio prodotto di n copie di $(\mathbb{R}, \tau_E)$.
- Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di aperti di X_1 e X_2 rispettivamente, allora

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{A_1 \times A_2;\ A_j \in \mathcal{B}_j\}$$

è una base di aperti dello spazio prodotto.

- Le proprietà di separazione, numerabilità, connessione, connessione per archi, compattezza, compattezza per successioni si sollevano sullo spazio prodotto, cioè se entrambi gli spazi X_1 e X_2 verificano una di queste proprietà, allora anche lo spazio prodotto la verifica.

• **(Topologia quoziente)** Sia $f : X \to Y$ una applicazione surgettiva tra insiemi. Se X è uno spazio topologico, muniamo Y della topologia τ_f definita dalla proprietà di essere la *più fine* tra quelle che rendono f continua. L'applicazione f induce una relazione di equivalenza su X ($x \sim_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$), tale che Y si identifica con l'insieme quoziente $Y = X/\sim_f$ e f con la naturale proiezione sul quoziente. Pertanto τ_f è detta la *topologia quoziente* su $X/\sim_f$. Invertendo il verso del discorso, ad ogni relazione di equivalenza $\sim$ su X, detta f la proiezione naturale sul quoziente $X/\sim$, tautologicamente $\sim=\sim_f$, e quindi possiamo munire $X/\sim$ della topologia quoziente τ_f.

La seguente caratterizzazione degli aperti di τ_f è una conseguenza diretta della definizione:

A è aperto per τ_f se e solo se esiste un aperto S di X tale che $A = f(S)$ e $S = f^{-1}(f(S))$; tale S è detto un aperto f-saturo *di X.*

Se X è connesso (risp. connesso per archi) allora ogni spazio quoziente $X/\sim$ lo è.

Se X è compatto (risp. per successioni) e $X/\sim$ è T_2, allora anche lo spazio quoziente è compatto (per successioni): le nostre nozioni di compattezza richiedono che gli spazi siano T_2. L'ipotesi che il quoziente sia T_2 è necessaria perché in generale $X/\sim$ non è T_2 anche se X lo è. In altre parole:

In generale la proprietà T_2 non passa al quoziente: ecco un esempio. Consideriamo su $(\mathbb{R}, \tau_E)$ la relazione di equivalenza $x \sim_{\mathbb{Q}} y$ se e solo se $x - y \in \mathbb{Q}$. Indichiamo con $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ lo spazio quoziente. Verificare per esercizio che $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ non è T_2.

In generale le proprietà di numerabilità non passano al quoziente: ecco un esempio. Consideriamo su $(\mathbb{R}, \tau_E)$ la relazione di equivalenza per cui $x \sim y$ se e solo se $x = y$ oppure x e y appartengono entrambi a $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Indichiamo con $\mathbb{R}/\sim$ lo spazio quoziente. Sia $[0] \in \mathbb{R}/\sim$ la classe di equivalenza di 0, che considerata come sottoinsieme di $\mathbb{R}$ coincide con $\mathbb{Z}$. Verificare per esercizio che $[0]$ non ammette alcuna base di intorni numerabile. Quindi $\mathbb{R}/\sim$ non è 1-numerabile, a maggior ragione non è 2-numerabile.