April 11, 2017

IL FIBRATO TANGENTE

• **Il fibrato tangente di un aperto di $\mathbb{R}^n$.** Sia $U \subset \mathbb{R}^n$ un aperto; consideriamo $T(U) = U \times \mathbb{R}^n$, dove mettiamo a fuoco su $\mathbb{R}^n$ la sua struttura di spazio vettoriale. Allora una coppia $(x, v) \in T(U)$ è formata da un *punto* $x \in U$ e da un *vettore* $v \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in U$, la traslazione, $v \to v + x$, $0 \to x$ è bigettiva e permette di interpretare lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ come lo spazio dei vettori tangenti a U "applicati" nel punto x. La proiezione

$$\pi_U : T(U) \to U,\ \pi_U(x, v) = x$$

è liscia e surgettiva; per ogni $x \in U$, la *fibra*

$$T_xU = \pi_U^{-1}(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^n$$

è per definizione lo *spazio vettoriale tangente a U in x*; quindi $T(U) = \cup_x T_xU$ è l'unione delle fibre, ciascuna delle quali è identificata con una copia dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$. La coppia $(T(U), \pi_U)$ è il *fibrato tangente* di U ; U ne è lo *spazio di base*, $T(U)$ lo *spazio totale*, π_U la *proiezione* (che spesso sarà sottintesa).

• Sia $f : U \to W$ un' applicazione liscia tra aperti di $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m$ rispettivamente. È definita allora l'*applicazione tangente*

$$Df : T(U) \to T(W),\ Df(x, v) = (f(x), d_xf(v))$$

questa è una applicazione liscia che "manda fibre in fibre in modo lineare", cioè: $f \circ \pi_U = \pi_W \circ Df$, per ogni $x \in U$, $d_xf : T_xU \to T_{f(x)}W$ è un'applicazione lineare. Diremo che Df è un' *applicazione fibrata.* Inoltre, se $h = g \circ f$, allora

$$Dh = Dg \circ Df,\ D\mathrm{id} = id$$

quindi se f è un diffeomorfismo, allora anche Df è un diffeomorfismo che inoltre manda fibre in fibre per mezzo di isomorfismi lineari; diremo che Df è un diffeomorfismo fibrato. In particolare se $f : U' \to U$ è un' inclusione tra aperti di $\mathbb{R}^n$, allora per ogni $x \in U'$, $d_xf = \mathrm{id}$. Se $U \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m$, allora per ogni $x \in U$, $T_xU = x \times \mathbb{R}^n \subset x \times \mathbb{R}^m = T_x\mathbb{R}^m$.

- Consideriamo la situazione contemplata dalle conclusioni del teorema della funzione implicita, versione surgettiva: $\psi : W \to U$, $\psi(0) = 0$ parametrizzazione locale di $U \subset \mathbb{R}^n$ intorno a $0 \in U$; $f : U \to \mathbb{R}^k$, $f(0) = 0$, $f \circ \psi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_k)$. Sia $M = f^{-1}(0)$; questa è una $(n-k)$-sottovarietà liscia di U; $(f \circ \psi)^{-1}(0) = \psi^{-1}(M) = \{x_1 = \dots = x_k = 0\} \cap W$ quindi è un aperto W' del sottospazio vettoriale $\{x_1 = \dots = x_k = 0\} \sim \mathbb{R}^{n-k}$ di $\mathbb{R}^n$; la restrizione di ψ, $\hat{\psi} : W' \to M$ è una parametrizzazione di M. Per ogni $x \in W'$, sia $y = \hat{\psi}(x)$. Allora

$$d_x\hat{\psi}(T_xW') = \ker d_yf \subset T_yU\ .$$

• **(Interpretazione differenziale di T_xU)** Per ogni $x \in U$, indichiamo con $\mathcal{E}_x$ linsieme dei *germi di funzioni lisce in x.* Precisamente, $\mathcal{E}_x$ si ottiene come quoziente dell' insieme delle funzioni lisce definite su qualche intorno aperto U' di x in U a valori in $\mathbb{R}$, rispetto alla relazione di equivalenza: $(U_1, f_1) \sim (U_2, f_2)$ se $f_1 = f_2$ su qualche aperto $0 \in U_3 \subset U_1 \cap U_2$. $\mathcal{E}_x$ è in modo naturale una $\mathbb{R}$-algebra, cioè un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, munito inoltre di un prodotto (commutativo) che verifica le usuali proprietà distributive rispetto alle operazioni della struttura vettoriale. Si noti che $\mathcal{E}_x$ non dipende da U, nel senso che otteniamo lo stesso spazio partendo da qualsiasi aperto che contenga x (per esempio tutto $\mathbb{R}^n$). Per semplificare le notazioni, supponiamo che $x = 0$. Sia $v = \sum_j a^j e_j \in T_0U$, dove $\{e_j\}$ è la base canonica di $\mathbb{R}^n$. Definiamo allora

$$\delta_v : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{R},\ \delta_v[f] = \sum_j a^j \frac{\partial f}{\partial x_j}(0)$$

che è ben definita (cioè non dipende dalla scelta del rappresentante f del germe in questione - in seguito confonderemo germi e rappresentanti) ed inoltre è una *derivazione* su $\mathcal{E}_0$, cioè: δ_v è $\mathbb{R}$-lineare e verifica la "regola di Leibniz":

$$\delta_v(fg) = f(0)\delta_v(g) + \delta_v(f)g(0) \ .$$

Abbiamo quindi definito un'applicazione

$$\delta : T_0U \to \mathrm{Der}(\mathcal{E}_0)$$

a valori nelle derivazioni su $\mathcal{E}_0$. *Tale applicazione è un isomorfismo di spazi vettoriali.* Infatti, a meno di restringerlo possiamo supporre che U sia convesso, quindi, abbiamo la usuale espressione:

$$f(x) - f(0) = \sum_j g_j(x)x_j$$

dove le g_j sono lisce e $g_j(0) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(0)$. Se δ è una derivazione

$$\delta(f - f(0)) = \delta(f) = \sum_j \delta(x_j)g_j(0)$$

quindi ponendo $a^j = \delta(x_j)$ determiniamo l'unico vettore $v \in T_0U$ tale che $\delta = \delta_v$. Si vede chiaramente che avere posto $x = 0$ non fa perdere di generalità. Se $\phi : W \to U$, $\phi(0) = 0$ è un diffeomorfismo, allora la composizione $f \to f \circ \phi$ induce un isomorfismo $\phi^* : \mathcal{E}_0 \to \mathcal{E}_0$ tale che per ogni $v \in T_xW$,

$$\delta_v(f) = \delta_{d_0\phi(v)}(\phi^*(f)) \ .$$

•**(Globalizzazione)** Vogliamo estendere e globalizzare le definizioni e le proprietà del fibrato tangente e dell'applicazione tangente già viste nel caso degli aperti di spazi euclidei al caso di varietà lisce arbitrarie e di applicazioni lisce tra varietà. Nella situazione contemplata dal teorema della funzione implicita discusso sopra, vogliamo anche che risulti $T(M) = D\hat{\psi}(T(W'))$.

(Costruzione di $(T(M), \pi_M)$) Sia $\{(U_j, \phi_j)\}_{j\in J}$ l'atlante differenziabile massimale di una data n-varietà M. Per ogni $(i,j) \in J^2$ definiamo

$$\mu_{j,i} : U_i \cap U_j \to GL(n)$$
$$\mu_{j,i}(x) = d_{\phi_i(x)}\phi_j \circ \phi_i^{-1} \ .$$

Si noti che questi sono ottenuti usando le applicazioni tangenti dei cambiamenti di carta. La famiglia $\{\mu_{j,i}\}$ verifica le seguenti proprietà:

1. Per ogni $(i,j) \in J^2$, $\mu_{j,i}$ è liscia;
2. Per ogni $i \in J$, per ogni $x \in U_i$, $\mu_{i,i}(x) = I$;
3. Per ogni $(i,j) \in J^2$, per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\mu_{j,i}(x) = \mu_{i,j}(x)^{-1} \in GL(n)$;
4. Per ogni $(i,j,k) \in J^3$, per ogni $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $\mu_{i,k}(x)\mu_{k,j}(x)\mu_{j,i}(x) = I$.

Riassumiamo queste proprietà dicendo che $\{\mu_{i,j}\}$ è un *cociclo liscio definito sul ricoprimento aperto $\{U_j\}$ a valori in $GL(n)$*.
Consideriamo lo spazio topologico prodotto $M \times \mathbb{R}^n \times J$ dove J è munito della topologia discreta. Consideriamo il sottospazio topologico $\mathcal{T} = \{(x,v,j) |\ x \in U_j\}$. Dunque $\mathcal{T}$ è l'unione disgiunta degli aperti $U_j \times \mathbb{R}^n \times \{j\}$, ognuno di questi è canonicamente omeomorfo a $U_j \times \mathbb{R}^n$. Mettiamo su $\mathcal{T}$ la relazione tale che $(x,v,j) \sim (x',v',k)$ se e solo se $x = x', v' = \mu_{k,j}(x)v$. Le proprietà di cociclo assicurano che si tratta di una relazione di equivalenza. Consideriamo allora lo spazio topologico quoziente

$$T(M) = \mathcal{T}/\sim$$

con proiezione continua $q : \mathcal{T} \to T(M)$. $T(M)$ è T_2 e 2-numerabile. E' ben definita la proiezione

$$\pi_M : T(M) \to M, \ \pi_M([x,v,j]) = x$$

che è continua; infatti per ogni aperto A di M, $(\pi_M \circ q)^{-1}(A)$ è l'intersezione di $\mathcal{T}$ con $A \times \mathbb{R}^n \times J$, quindi è un aperto.

(Banalizzazioni locali) Per ogni $j \in J$, poniamo

$$\Psi_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to T(M),\ (x,v) \to q(x,v,j) = [(x,v,j)]$$

e si verifica che:

(1) Ψ_j è continua (perchè q lo è);
(2) Se $\pi_M \circ q(x,v,j) = x$, allora $\pi_M \circ \Psi_j(x,v) = x$, quindi Ψ_j è a valori in $\pi_M^{-1}(U_j)$ e $\pi_M \circ \Psi_j = p_j$, dove $p_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to U_j$ è la proiezione sul primo fattore.
(3) $\Psi_j : U_j \times \mathbb{R}^n \to \pi_M^{-1}(U_j)$ è un omeomorfismo. Infatti se $b = q(x,w,k) \in \pi_M^{-1}(U_j)$ allora $b = \Psi_j(x, \mu_{j,k}(x)w)$, quindi Ψ_j è surgettiva. Se $(x,v,j) \sim (x',v',j)$, allora $x = x'$ e $v = v'$ perché $\mu_{j,j}(x) = I$. Ne segue che Ψ_j è iniettiva. Infine, basta dimostrare che se W è aperto in $U_j \times \mathbb{R}^n$, allora $q^{-1}(\Psi_j(W))$ è aperto in $\mathcal{T}$. Poiché $\{U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\}\}$ è un rcoprimento aperto si $\mathcal{T}$, basta dimostrare che ogni $q^{-1}(\Psi_j(W)) \cap (U_k \times \mathbb{R}^n \times \{k\})$ è aperto. Tale intersezione è contenuta in $(U_j \cap U_k) \times \mathbb{R}^n \times \{k\}$ che è a sua volta un aperto di $\mathcal{T}$. Su questo aperto $q = \Psi_j \circ r$, dove $r(x,v,k) = (x, \mu_{j,k}(x)v)$ che è continua, quindi la tesi segue.

(Atlante fibrato di $T(M)$) E' chiaro che $T(X)$ è una $2n$-varietà topologica; in effetti è liscia e la proiezione π_M è liscia. Un atlante differenziabile è $\{\pi_m^{-1}(U_j), \Phi_j\}_{j\in J}$ dove $\Phi_j = (\phi_j, \mathrm{id}) \circ \Psi_j^{-1}$, dove

$$(\phi, \mathrm{id}) : U_j \times \mathbb{R}^n \to W_j \times \mathbb{R}^n,\ (x,v) \to (\phi_j(x), v)\ .$$

I cambiamenti di carta sono della forma

$$\Phi_j \circ \Phi_i^{-1}(y,v) = (\phi_j \circ \phi_i^{-1}(y), \mu_{j,i}(x)v)$$

dove $(y,v) = \Phi_i(x,v)$. Sono applicazioni fibrate che mandano fibre in fibre per mezzo di isomorfismi lineari. Riassumiamo dicendo che $\{\pi_m^{-1}(U_j), \Phi_j\}_{j\in J}$ è l'*atlante fibrato* di $T(M)$.

(Applicazione tangente) Sia $f : M \to M'$ liscia. Definiamo $Df : T(M) \to T(M')$ in modo tale che per ogni rappresentazione locale $\tilde{f}$ di f, essa coincida localmente con $D\tilde{f}$. Precisamente, siano $(\pi_M^{-1}(U_j), \Phi_j)$, $(\pi_{M'}^{-1}(U'_k), \Phi'_k)$ carte fibrate di $T(M)$ e $T(M')$, che dominano carte (U_j, ϕ_j) e (U'_k, ϕ'_k) di M e M' rispettivamente e che forniscono una rappresentazione locale $\tilde{f} = \phi'_k \circ f \circ \phi_j^{-1}$ di f. Allora definiamo $Df : \pi_M^{-1}(U_j) \to \pi_{M'}(U'_k)$ mediante: $Df = (\Phi'_k)^{-1} \circ D\tilde{f} \circ \Phi_i$. Usando la relazione di equivalenza con cui abbiamo costruito il fibrato tangente, si verifica direttamente che al variare delle rappresentazioni locali di f, queste definizioni parziali di Df sono compatibili e sono restrizioni di $Df : T(M) \to T(M')$ globalmente ben definita. Df manda fibre in fibre in modo lineare, cioè è una applicazione fibrata. Se f è un diffeomorfismo, allora Df manda fibre in fibre via isomorfismi lineari (è un diffeomorfismo fibrato).

- Se $(M, \partial M)$ è una varietà con bordo e $f : \partial M \to M$ è l'inclusione allora $Df : T(\partial M) \to T(M)$ è iniettiva sulle fibre. Analogamente se $f : N \to M$ è l'inclusione della sottovarietà N in M.