February 23, 2016

G2-15-16: ALCUNE NOZIONI DI TOPOLOGIA GENERALE

• Una *topologia* τ su un insieme X è un insieme di sottoinsiemi di X tale che

(1) $\emptyset$ e X appartengono a τ;
(2) Ogni unione di elementi di τ appartiene a τ;
(3) L'intersezione di due elementi di τ appartiene a τ.

(X, τ) è detto uno *spazio topologico*. Spesso τ è sottintesa. Gli elementi di τ sono per definizione gli insiemi *aperti* della topologia. Un sottoinsieme di (X, τ) è *chiuso* se il suo complementare è aperto.

• Date due topologie τ e τ' su X, diciamo che *τ è più fine di τ'* se $\tau' \subset \tau$. La topologia *banale* $\tau_B = \{\emptyset, X\}$ è la meno fine tra tutte le topologie su X; la topologia *discreta* τ_D per cui ogni sottoinsieme di X è aperto, è la più fine tra tutte le topologie.

• Ogni sottoinsieme Y di (X, τ) eredita una topologia $\tau_Y = \{A \cap Y;\ A \in \tau\}$; (Y, τ_Y) è un *sottospazio topologico* di (X, τ).

• Dato un sottoinsieme Y dello spazio topologico X, l'intersezione $\bar{Y}$ di tutti i chiusi di X che contengono Y è il più piccolo chiuso che contiene Y (se $Y \subset F \subset \bar{Y}$ ed F è chiuso, allora $F = \bar{Y}$). $\bar{Y}$ è detto la *chiusura di Y*. L'unione $\mathrm{Int}(Y)$ di tutti gli aperti di X contenuti in Y è il piu' grande aperto contenuto in Y; è detta la *parte interna di Y*. Può essere vuota. Un punto è interno a Y se appartiene alla parte interna. Un insieme U è un *intorno* di $x \in X$ se x è interno a U. $F(Y) = \bar{Y} \setminus \mathrm{Int}(Y)$ è detto la *frontiera* di Y. Y è chiuso se coincide con la sua chiusura; è aperto se coincide con la sua parte interna.

• Un punto x dello spazio topologico X è di *accumulazione* per il sottoinsieme Y se per ogni intorno U di x in X, $(U \setminus \{x\}) \cap Y$ non è vuoto.

- $\bar{Y}$ consiste dell'unione di Y e dell'insieme dei suoi punti di accumulazione.

• Una applicazione $f : X \to Y$ tra spazi topologici è *continua* se per ogni aperto A di Y, la controimmagine $f^{-1}(A)$ è un aperto di X. f è un *omeomorfismo* se è continua, invertibile e con inversa continua. In generale l'inversa di una funzione continua invertibile non è continua.

• **Spazi metrizzabili.** Ad ogni *spazio metrico* (X, d), cioè ad ogni insieme X munito di una *distanza* d, è canonicamente associato uno spazio topologico (X, τ_d). Gli aperti non vuoti sono le unioni di *palle aperte* cioè della forma $B(x, r) = \{y \in X;\ d(x, y) < r\}$, dove il *centro* x varia in X e il *raggio* r varia tra in numeri reali > 0. Si verifica che ogni palla aperta appartiene a τ_d. In generale una famiglia di aperti di uno spazio topologico tale che ogni aperto non vuoto è unione di aperti della famiglia è detta una *base di aperti*. Dunque τ_d è definita dal fatto che le palle aperte formano una base di aperti. (X, τ) è *metrizzabile* se $\tau = \tau_d$ per qualche distanza d du X. Due distanze d, d' su X sono *topologicamete equivalenti* se $\tau_d = \tau_{d'}$.

- La *topologia euclidea* τ_E su $\mathbb{R}^n$ è quella indotta dalla distanza euclidea $d(x, y) = \sqrt{(x - y, x - y)}$, dove $(.,.)$ è il prodotto scalare definito positivo standard su $\mathbb{R}^n$.
- Ogni distanza su $\mathbb{R}^n$ definita come sopra utilizzando un arbitrario prodotto scalare definito positivo è topologicamente equivalente alla distanza euclidea.
- La topologia discreta (X, τ_D) è metrizzabile mediante la distanza discreta $d_D(x, y) = 0$ (resp. $= 1$) se $x = y$ (resp. $x \neq y$).

• **(Una proprietà di separazione)** Uno spazio topologico X è detto *di Hausdorff* (brevemente, "T_2") se per ogni coppia di punti $x \neq y \in X$ esistono rispettivi intorni U_x e U_y in X tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$.

- Ogni spazio metrizzabile è T_2.
- Se X è T_2 allora ogni punto x è chiuso.
- Se X è T_2 e $x \in X$ è di accumulazione per il sottoinsieme Y, allora ogni intorno di x in X interseca Y in *infiniti* punti.

- La topologia τ_Z su $\mathbb{R}$, meno fine di τ_E, che ha come aperti non vuoti i complementari dei sottoinsiemi finiti di $\mathbb{R}$, non è T_2 ma tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono chiusi rispetto a τ_Z.
- La proprietà T_2 passa ai sottospazi ed è invariante per omeomorfismi.

• **(Proprietà di numerabilità)** Dati uno spazio topologico X, $x \in X$, una *base di intorni di* x è una famiglia di intorni di x in X tale che per ogni intorno U di x esiste un elemento W della famiglia tale che $W \subset U$. Uno spazio X è 1-*numerabile* se per ogni $x \in X$, esiste una successione di intorni di x, $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che costituisce una base di intorni di x. X è 2-*numerabile* se esiste una successione di aperti di X, $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che costituisce una base di aperti di X.

- Se X è 1-numerabile, allora ogni $x \in X$ ha una base di intorni numerabile $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tale che $U_{n+1} \subset U_n$ (presa una base di intorni numerabile $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, basta considerare le intersezioni $U_n = \cap_{j=0,\dots,n} W_j$).
- Se X è 2-numerabile allora è 1-numerabile (se $\mathcal{B}$ è una base numerabile di aperti, per ogni $x \in X$, $\mathcal{B}_x$ formata dagli elementi di $\mathcal{B}$ che contengono x è una base numerabile di intorni di x).
- Se X è metrizzabile allora è 1-numerabile (per ogni x, la famiglia delle palle aperte $\{B(x, 2^{-n})\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una base numerabile di intorni).
- Un sottoinsieme Y di X è *denso* se $\bar{Y} = X$. Se X è metrizzabile ed esiste una successione di punti di X, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, che costituisce un sottoinsieme denso Y, allora X è 2-numerabile (la famiglia numerabile delle palle $B(y, 2^{-n})$ dove y varia in Y e $n \in \mathbb{N}$ è una base di aperti).
- $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è 2-numerabile; infatti è metrizzabile e $\mathbb{Q}^n$ è un sottoinsieme denso numerabile.
- La topologia τ_S su $\mathbb{R}$, più fine di τ_E, che ha come base di aperti gli intervalli semi-aperti della forma $[a, b)$ verifica le seguenti proprietaà:

(1) E' T_2;
(2) E' 1-numerabile;
(3) $\mathbb{Q}$ è denso in $(\mathbb{R}, \tau_S)$;
(4) Non è 2-numerabile
(5) Non è metrizzabile.

- Le proprietà di numerabilità passano ai sottospazi e sono invarianti per omeomorfismi.

• **(Connessione)** Uno spazio topologico X è *connesso* se X è l'unico sottoinsieme non vuoto che sia contemporaneamente aperto e chiuso. Quindi X *non* è connesso se $X = A \cup A'$ dove A e A' sono aperti non vuoti tali che $A \cap A' = \emptyset$. Un sottoinsieme Y di X è connesso se lo è in quanto sottospazio topologico.
- Un sottoinsieme non vuoto Y di $(\mathbb{R}, \tau_E)$ è connesso se e solo se è un intervallo.
- Se $f : X \to X'$ è continua e X è connesso allora anche l'immagine $f(X)$ è connessa.

Un *arco in* X (a volte detto anche "un cammino") è un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \to X$, dove l'intervallo è considerato come un sottospazio di $(\mathbb{R}, \tau_E)$. Posto $x_j = \gamma(j)$, $j = 0, 1$, diciamo che l'arco γ unisce i punti x_0 e x_1 di X. X è detto *connesso per archi* se per ogni coppia x, y di punti di X questi sono uniti da un arco in X.

- Se X è connesso per archi, allora è connesso.
- Se $f : X \to X'$ è continua e X è connesso per archi allora anche l'immagine $f(X)$ è connessa per archi.
- "Essere uniti da un arco in X" definisce in generale una relazione di equivalenza su X. Le classi di equivalenza (considerate come sottoinsiemi di X) sono dette le *componenti connesse per archi di* X. X è connesso per archi se e solo se ha una sola componente connessa (p.a.).
- Il sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \tau_E)$ definito da

$$Y = \{(0, y);\ -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x));\ x > 0\}$$

è connesso ma non è connesso per archi.
- Ogni aperto non vuoto connesso A di $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è connesso per archi (basta verificare che ogni componente connessa p.a. è aperta, quindi ne esiste una sola perché A è connesso).
- Le proprietà di connessione *non* passano ai sottospazi e sono invarianti per omeomorfismi.

• **(Compattezza)** Trattando di compattezza, assumiamo che tutti gli spazi considerati siano T_2. Uno spazio topologico X è *compatto* se per ogni *ricoprimento aperto di* X (cioè una famiglia di aperti $\{A_j\}_{j\in J}$ - J arbitrario insieme di indici - tale che $X = \cup_{j\in J} A_j$) esiste un *sottoricoprimento finito* (cioè esiste $B \subset J$ finito tale che $X = \cup_{j\in B} A_j$). Un sottoinsieme Y di uno spazio topologico X è compatto se lo è in quanto sottospazio topologico.
- Un sottoinsieme Y di uno spazio compatto X è compatto se e solo se è chiuso ("chiuso"$\Rightarrow$ "compatto" non usa in effetti la proprietà T_2, che invece è importante per l'altra implicazione).

- Se $f : X \to Y$ è continua e X è compatto, allora anche l'immagine $f(X)$ è un compatto. Ne segue che la compattezza è invariante per omeomorfismi.
- Se $f : X \to X'$ è continua ed iniettiva allora $f : X \to f(X)$ è un omeomeorfismo (basta dimostrare che f manda chiusi di X in chiusi di $f(X)$; un chiuso Y in X è compatto perché X è compatto, quindi $f(Y)$ è un compatto in $f(X)$ perchè f è continua, quindi $f(Y)$ è chiuso in $f(X)$ perché $f(X)$ è compatto).

Una successione $a : \mathbb{N} \to X$ converge a $x \in X$ se per ogni intorno U di x in X, a_n appartiene *definitivamente* a U. Poiché consideriamo spazi T_2, ogni successione convergente ha un unico punto limite.
- Se X è 1-numerabile, Y è un sottoinsieme di X, allora $x \in X$ appartiene alla chiusura di $\bar{Y}$ di Y se e solo se esite una successione $a : \mathbb{N} \to Y$ che converge a x. Il punto x è di accumulazione per Y se e solo se esite una successione $a : \mathbb{N} \to Y \setminus \{x\}$ che converge a x.

Uno spazio topologico X è *compatto per successioni* se per ogni successione $a : \mathbb{N} \to X$ esiste una *successione estratta* (cioè della forma $a \circ b$ dove $b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente) convergente ad un punto x di X.

- Ogni intervallo chiuso e limitato di $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è compatto per successioni.
- Se X è compatto e 1-numerabile, allora è compatto per successioni (se una successione ha immagine finita, allora almeno un valore è preso infinite volte e quindi si può estrarre una successione che prende costantemente quel valore. Se una successione ha immagine infinita questa ha un punto di accumulazione x perché X è compatto; sia $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una base di intorni di x tale che $U_{n+1} \subset U_n$. Sia n_0 il minimo indice per cui a_{n_0} appartiene a U_0; sia n_1 il minimo indice tale che $n_1 > n_0$ e a_{n_1} appartiene a U_1 (questo esiste perchè essendo lo spazio T_2, U_1 interseca l'immagine della successione in infiniti punti); continuando così per induzione, estraiamo una successione a_{n_j} che converge a x).
- Se X è compatto per successioni e 2-numerabile, allora è compatto. (Poiché lo spazio è 2-numerabile, ogni ricoprimento aperto ammette un sottoricoprimento numerabile. Sia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ un ricoprimento aperto numerabile di X; basta dimostrare che esiste un sottoricoprimento finito. Se non esistesse, potremmo costruire per induzione una successione a_n di punti di X da cui non si può estrarre alcuna successione convergente, contro l'ipotesi).
- Un sottoinsieme Y di $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. (Poichè lo spazio è 2-numerabile, è equivalente ragionare in termini di successioni. Se un sottoinsieme Y non è limitato è possibile costruire una successione di punti di Y che diverge. Se è limitato è contenuto in un prodotto T di intervalli chiusi e limitati. Da ogni successione a valori in Y si estrae una successione convergente ad un punto x di T; infine $x \in Y$ perché Y è chiuso). $(\mathbb{R}^n, \tau_e)$ è *localmente compatto* (ogni punto ha una base di intorni compatti).
- Se $f : X \to \mathbb{R}$ è continua e X è compatto, allora X ha un punto di minimo assoluto e un punto di massimo assoluto per la funzione f (l'immagine di f è chiusa e limitata, quindi ha un massimo e un minimo e questi valori sono presi tramite f da qualche punto di X).

Dato una spazio metrico (X, d) questo si dice *totalmente limitato* se per ogni $\epsilon > 0$ esiste un insieme finito di palle aperte di raggio uguale a ϵ che ricoprono X.
- Se X è metrizzabile per mezzo della distanza d ed è compatto per successioni, allora (X, d) è totalmente limitato. (Altrimenti esisterebbe un $\epsilon > 0$ tale dato un punto punto arbitrario x_0 di X esisterebbero x_1 tale che $d(x_0, x_1) > \epsilon$, x_2 tale che $d(x_0, x_2) > \epsilon$ e $d(x_1, x_2) > \epsilon$, ..., continuando per induzione si otterebbe una successione di punti di X da cui non si può estrarre alcuna successione di Cauchy).

- Se X è metrizzabile e compatto per successioni, allora è 2-numerabile (Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una famiglia finita $\mathcal{B}_n$ di palle aperte di raggio uguale a 2^{-n} che ricoprono X. $\mathcal{B} = \cup_n \mathcal{B}_n$ è una base numerabile di aperti di X. Infatti Sia A un aperto di X, $x \in A$ e consideriamo il ricoprimento aperto di X formato da A e da $X \setminus \{x\}$. Allora esiste $\bar{n}$ abbastanza grande tale che ogni palla di $\mathcal{B}_{\bar{n}}$ è interamente contenuta in uno dei due aperti; quelle che contengono x sono interamente contenute in A, quindi A è unione di palle di $\mathcal{B}$).
- Se X è metrizzabile, allora è compatto se e solo se è compatto per successioni.
- Se X è metrizzabile per mezzo della distanza d, allora X è compatto se e solo se lo spazio metrico (X, d) è completo e totalmente limitato.

• **(Topologia prodotto)** Siano X_1 e X_2 spazi topologici. Consideriamo l'insieme prodotto $X_1 \times X_2$ munito delle due proiezioni naturali sui fattori, p_1 e p_2. La topologia prodotto $\tau_1 \times \tau_2$ su $X_1 \times X_2$ è definita come la topologia *meno fine* tra quelle che rendono le due proiezioni continue. Si ottiene così lo spazio topologico prodotto.

- Se $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ sono basi di aperti di X_1 e X_2 rispettivamente, allora

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 = \{A_1 \times A_2;\ A_j \in \mathcal{B}_j\}$$

è una base di aperti dello spazio prodotto.
- Le proprieta' di separazione, numerabilità, connessione, compattezza viste sopra si sollevano sullo spazio prodotto.
- La nozione si estende al prodotto di un numero finito di spazi topologici. In particolare $(\mathbb{R}^n, \tau_E)$ è lo spazio prodotto di n copie di $(\mathbb{R}, \tau_E)$.

• **(Topologia quoziente)** Sia $f : X \to Y$ una applicazione surgettiva tra insiemi. Se X è uno spazio topologico, muniamo Y della topologia τ_f definita dalla proprietà di essere la *più fine* tra quelle che rendono f continua. L'applicazione f induce una relazione di equivalenza su X ($x \sim_f y$ se e solo se $f(x) = f(y)$), tale che Y si identifica con l'insieme quoziente $Y = X/\sim_f$ e f con la naturale proiezione sul quoziente. Pertanto τ_f è detta la topologia quoziente su $X/\sim_f$. Invertendo il verso del discorso, ad ogni relazione di equivalenza $\sim$ su X, detta f la proiezione naturale sul quoziente $X/\sim$, tautologicamente $\sim = \sim_f$, e quindi possiamo munire $X/\sim$ della topologia quoziente τ_f.

- A è aperto per τ_f se e solo se esiste un aperto S di X tale che $A = f(S)$ e $S = f^{-1}(f(S)$ (tale S è detto un aperto *f-saturo* di X).