Prodotti scalare 4

Notazione: Dato (V, Φ) non degenere, W_j sottospazi

$$W_1 \perp W_2 \perp \cdots \perp W_k$$

indica una *somma diretta/ortogonale*. Significa che è una somma diretta ed inoltre se v e w appartengono ad addendi diversi allora sono ortogonali, $\Phi(v, w) = 0$.

Il teorema spettrale reale può essere riformulato nel modo seguente

(V, Φ) *reale definito positivo,* $f = f^*$ *endomorfismo autoaggiunto. Allora* $\mathrm{Spec}(f)$ *è reale e*

$$V = V_{\lambda_1} \perp \cdots \perp V_{\lambda_n}$$

Il fatto che due autovettori relativi ad autovalori distinti siano ortogonali si può dimostrare direttamente

$f(v_1) = \lambda_1 v_1$, $f(v_2) = \lambda_2 v_2$

$\lambda_1 \Phi(v_1, v_2) = \Phi(f(v_1), v_2) = \Phi(v_1, f(v_2)) = \lambda_2 \Phi(v_1, v_2)$, $(\lambda_1 - \lambda_2)\Phi(v_1, v_2) = 0$.

Un'altra dimostrazione che una matrice simmetrica reale ammette almeno un autovalore reale

Considero $\mathbb{R}^n$ munito di Φ_I,

$A \in M(n, \mathbb{R})$, $A = A^t$, $f_A(X) = AX$.

In $\mathbb{R}^n$ consideriamo la sfera unitaria

$S = \{X \in \mathbb{R}^n;\ X^t X = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$

Consideriamo la funzione

$f : S \to \mathbb{R}$, $f(v) = v^t A v$

(qui A è associato al prodotto scalare Φ_A e considero la restrizione su S della sua forma quadratica).

f è continua, S è un 'compatto', quindi esiste su S un punto di massimo v. Voglio mostrare che v è un autovettore di f_A. Per fare questo basta dimostrare che posto $W = \text{Span}\{v\}$, per ogni $w \in W^{\perp}$, $(Av)^t w = 0$, cioè $Av \in W$. Non è restrittivo supporre che $w \in S$.

Si consideri il piano Z generato da $\{v, w\}$ e la circonferenza $S \cap Z$. Questa è parametrizzata dalla funzione

$C : \mathbb{R} \to S$, $C(x) = \cos(x)v + \sin(x)w$

$C(0) = v$, $C'(t) = w$. Consideriamo la funzione composta

$f \circ C(x) = C(x)^t AC(x)$

Essa è derivabile e 0 è un punto di massimo, quindi $(f \circ C)'(0) = 0$.

Calcolando si ottiene

$(f \circ C)'(x) = 2(AC(x))^t C'(x)$ da cui

$2(AC(0))^t C'(0) = 2(Av)^t w = 0$

come voluto.

Alcune (dis)uguaglianze euclidee

V $\mathbb{R}$-spazio munito di Φ def > 0 è detto uno *spazio euclideo*. Il passaggio alle coordinate rispetto ad una base ortonormale è una isometria con $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto euclideo standard

$$\Phi_I(X, Y) = X^t Y$$

$||v|| := \sqrt{\Phi(v, v)}$ è la *norma* di v. Per ogni scalare c, $||cv|| = |c|||v||$

$$d(v, w) := ||v - w|| = d(w, v)$$

è la *distanza* dello spazio euclideo.

Pitagora: Se $\Phi(v, w) = 0$,

$$||v + w||^2 = |v||^2 + ||w||^2$$

Parallelogramma: Per ogni v, w,

$$||v + w||^2 + ||v - w||^2 = 2||v||^2 + 2||w||^2$$

Disuguaglianza di Schwarz:

$|\Phi(v, w)| \leq ||v|| ||w||$

Dim. È vera se $w = 0$. Supponiamo $||w|| = 1$. Sia λw la proiezione ortogonale di v lungo w, $z = v - \lambda w$ la proiezione sullo spazio ortogonale a w. Per Pitagora

$||v||^2 = ||z||^2 + \lambda^2$ da cui $|\lambda| \leq ||v||$ che è la disuguaglianza voluta in questo caso. In generale, se $w \neq 0$, si normalizza lavorando come prima usando $w/||w||$.

Disuguaglianza triangolare. Fa parte della verifica che d è una distanza.

$$||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$$

Dim. Entrambi i termini della disuguaglianza sono ≥ 0. Quindi possiamo passare ai quadrati. Verifichiamo che

$$\Phi(v + w, v + w) \leq (||v|| + ||w||)^2$$

Infatti

$$\Phi(v + w, v + w) = ||v||^2 + 2\Phi(v, w) + ||w||^2$$

$$\leq ||v||^2 + 2||v||||w|| + ||w||^2 =$$

$$(||v|| + ||w||)^2$$

come voluto.

Sia W un sottospazio di V. $\Phi|W > 0$ e $V = W \perp W^{\perp}$. Sia $\{v_1, \dots v_k\}$ una base ortogonale di W. Dato $v \in V$, sia c_i il coefficiente di Fourier di v lungo v_i. Allora

$\sum_{j=1}^{k} c_j v_j$

è la proiezione ortogonale di v su W,

$z := v - \sum_{j=1}^{k} c_j v_j$ la proiezione su $W^{\perp}$.

Per ogni $w \in W$

$||z|| \leq ||v - w||$

Dim. $||v - w||^2 = ||z + (v - w - z)||^2$

poiché $v - w - z \in W$, $\Phi(z, v - w - z) = 0$,

per Pitagora

$||v - w||^2 = ||z||^2 + ||v - w - z||^2$

da cui $||v - w|| \geq ||z||$ come voluto.

Disuguaglianza di Bessel. Nella stessa situazione supponiamo di più che $\{v_1, \dots v_k\}$ sia una base *ortonormale* di W. Allora

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^2 \leq ||v||^2$$

Dim. $0 \leq \Phi(z, z) =$

$$||v||^2 - \sum_j 2c_j\Phi(v, v_i) + \sum_j c_j^2 = ||v||^2 - \sum_j c_j^2$$

Un'altra dimostrazione: estendiamo $\{v_1, \dots v_k\}$ ad una base $\mathcal{B}$ di V. Applicando l'algoritmo di ortogonalizzazione otteniamo una base ortonormale di V che estende quella data di W,

$$\{v_1, \dots v_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}.$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{k} c_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} c_j^2 = ||v||^2$$

Isom(V, d) Lo spazio euclideo (V, Φ) è munito della distanza d definita prima. Diciamo che $f : V \to V$ **preserva la distanza** se per ogni $v, w \in V$,

$$d(f(v), f(w)) = d(v, w).$$

Notiamo che non si richiede che f sia lineare. Indichiamo com Isom(V, d) l'insieme di queste applicazioni.

$O(\Phi) \subset$ Isom(V, d).

Anche le **traslazioni** $\tau_w : V \to V$, $\tau_w(v) := v+w$ stanno in Isom(V, d): $||(v + w) - (z + w)|| = ||v - z||$. Se $w \neq 0$, la traslazioni τ_w non è lineare.

$f \in$ Isom(V, d) se e solo se esiste $g \in O(\Phi)$ tale che $f(v) = f(0) + g(v) = \tau_{f(0)} \circ g(v)$.

Dim. Poniamo $g(v) := \tau_{-f(0)} \circ f = f(v) - f(0)$, $g \in \mathrm{Isom}(V, d)$ e $g(0) = 0$. Dimostriamo che $g \in O(\Phi)$.

g *preserva la norma*:

$$||g(v)|| = d(0, g(v)) = d(g(0), g(v)) =$$

$$d(0, v) = ||v||$$

g *preserva il prodotto scalare*:

$$d(v, w) = ||v - w|| = d(g(v), g(w)) = ||g(v) - g(w)||$$

$$||v - w||^2 = ||v||^2 - 2\Phi(v, w) + ||w||^2$$

$$||g(v) - g(w)||^2 =$$

$$||g(v)||^2 - 2\Phi(g(v), g(w)) + ||g(w)||^2$$

poiché g preserva la norma, sottraendo si ottiene $\Phi(v, w) = \Phi(g(v), g(w))$.

Resta da dimostrare che g è lineare.

Fissiamo una base ortonormale $\{v_1, \ldots, v_n\}$ per Φ. Poiché g preserva il prodotto scalare, anche $\{g(v_1), \ldots, g(v_n)\}$ è una base ortonormale

$$g(v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = b_1 g(v_1) + \cdots + b_n g(v_n).$$

Resta da dimostrare che $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

$$a_i = \Phi(v, v_i) = \Phi(g(v), g(v_i)) = b_i$$

come voluto.

Teorema spettrale Hermitiano

V $\mathbb{C}$-spazio vettoriale. Un *prodotto Hermitiano* Φ su V è una applicazione

$\Phi : V \times V \to \mathbb{C}$ tale che

$$\Phi(v + z, w) = \Phi(v, w) + \Phi(z, w)$$

$$\Phi(v, w + z) = \Phi(v, w) + \Phi(v, z)$$

$$\Phi(\lambda v, w) = \lambda \Phi(v, w)$$

$$\Phi(v, \lambda w) = \bar{\lambda} \Phi(v, w)$$

$$\Phi(v, w) = \overline{\Phi(w, v)}$$

Ne segue che per ogni v, $\Phi(v, v) \in \mathbb{R}$.

Caso matriciale

$\mathbb{C}^n$, $\Phi(Z, W) = \Phi_M(Z, W) = Z^t M \bar{W}$, $M = \bar{M}^t$.

Lo studio dei prodotti Hermitiani ricalca parola per parola quello dei prodotti scalare reali.

È definita la **segnatura** e questa è un invariante completo e abbiamo le stesse forme normali matriciali, realizzate da basi ortogonali normalizzate. In particolare $\Phi_I(Z,W) = Z^t\bar{W}$ è il prodotto Hermitiano definito positivo standard.

Nel caso definito > 0 le basi ortonormali vengono dette *unitarie*. Il gruppo ortogonale è chiamato *unitario*. Il gruppo unitario matriciale classico è

$$U(n) = \{P \in GL(n,\mathbb{C});\ P^{-1} = \bar{P}^t\}.$$

Le matrici di cambiamento di base tra basi unitarie appartengono a $U(n)$

$O(n,\mathbb{R}) \subset U(n)$

Andando verso la versione Hermitiana del teorema spettrale, **da ora in poi supponiamo che V sia munito di Φ Hermitiano definito positivo**

Per ogni $f \in \mathrm{End}(V)$, l'*aggiunto* f^* è caratterizzato dalla proprietà che per ogni v, w,

$$\Phi(v, f(w)) = \Phi(f^*(v), w).$$

Nel caso di $\mathbb{C}^n$ e Φ_I, $A^* = \bar{A}^t$.

Si tratta di caratterizzare gli endomorfismi f di V che siano diagonalizzabili per mezzo di qualche base unitaria.

Diciamo che un endomorfismo f è **normale** se $f \circ f^* = f^* \circ f$ (**commuta con il suo aggiunto**).

Condizione **necessaria** *affinché f sia unitariamente diagonalizzabile è che f sia normale.*

Dim. Passando in coordinate rispetto ad una base unitaria diagonalizzante, f è rappresentato da una matrice D diagonale.

$$D^* = \bar{D}^t = \bar{D}$$

ed è chiaro allora che D commuta con D^*.

Alcune classi di endomorfismi normali:

Autoaggiunti: $f^* = f$ $(A = \bar{A}^t)$.

Anti-autoaggiunti: $f^* = -f$ $(A = -\bar{A}^t)$.

Unitari: $f^* = f^{-1}$ $(A^{-1} = \bar{A}^t)$.

Teorema TSH. *f è unitariamente diagonalizzabile se e solo se f è normale.*

Corollario. (Caratterizzazione spettrale) *Sia f normale, Allora*

f è autoaggiunto se e solo se ha spettro reale (tutti gli autovalori sono reali).

f è anti-autoaggiunto se e solo se ha spettro immaginario puro.

f è unitario se e solo se ha spettro unitario (per ogni autovalore $|\lambda| = 1$)

Dimostrazione del corollario: Essendo normale, è unitariamente diagonalizzabile. In un base unitaria è rappresentato da una matrice diagonale D, $D^* = \bar{D}$

$D = \bar{D}$ se e solo se D è reale.

$D = -\bar{D}$ se e solo se D è immaginaria pura.

$D\bar{D} = I$ se e solo se D è unitaria.

Dimostrzione del TSH:

Il punto chiave è mostrare che λ è un autovalore di f se e solo se $\bar{\lambda}$ è un autovalore di f^*, e i rispettivi autospazi coincidono. Poiché $(f^*)^* = f$, basta dimostrare solo una delle due implicazioni. Supponiamo $f(v) = \lambda v$, $v \neq 0$. Poiché Φ è definito positivo, $f^*(v) = \bar{\lambda} v$ se e solo se

$$\Phi(f^*(v) - \bar{\lambda} v, f^*(v) - \bar{\lambda} v) = 0 \ .$$

Poiché f e f^* commutano, allora $V_\lambda(f)$ è f^*-invariante. Quindi $f^*(v) - \bar{\lambda} v \in V_\lambda(f)$. D'altra parte, per ogni $w \in V_\lambda(f)$, abbiamo

$$\Phi(f^*(v), w) = \Phi(v, f(w)) = \Phi(v, \lambda w) =$$

$$\bar{\lambda}\Phi(v, w) = \Phi(\bar{\lambda} v, w)$$

da cui $\Phi(f^*(v) - \bar{\lambda} v, w) = 0$ come volevamo.

A questo punto, la dimostrazione si conclude per induzione sulla dimensione, analogamente alla dimostrazione del caso reale. Si fissa un autovalore λ con autovettore v e si mostra che le restrizioni a $\mathrm{Span}\{v\}^{\perp}$ di Φ e di f verificano le ipotesi del teorema ...

Operatori normali reali.

Sia V reale munito di Φ definito positivo. La nozione di f **normale** è definita ugualmente e si hanno esempi di endomorfismi normali reali oltre quelli autoaggiunti.

Se consideriamo la **complessificazione Hermitiana** di Φ

$\Phi_{\mathbb{C}}(X+iY,Z+iW) := (\Phi(X,Z)-\Phi(Y,W)) + i(\Phi(Y,Z)-\Phi(X,W))$

essa risulta definita positiva e una base reale ortonormale per Φ è unitaria per $\Phi_{\mathbb{C}}$. Se f è normale reale, allora la sua complessificazione $f_{\mathbb{C}}$ è normale.

Versione matriciale: La complessificazione Hermitiana di Φ_I su $\mathbb{R}^n$ è Φ_I su $\mathbb{C}^n$. Se A è reale,

$A^* = A^t = \bar{A}^t = A^*_{\mathbb{C}}$.

L'idea è quella di adattare il meccanismo della complessificazione, già usato per la forma di Jordan reale, per ottenere *forme matriciali normali a meno di cambiamenti di base ortonormali, per gli endomorfismi normali reali, oltre il caso di quelli autoaggiunti già coperto da TSR.*

Sia f normale reale, $f_{\mathbb{C}}$ il suo complessificato. Se tutti gli autovalori sono reali siamo nel caso autoaggiunto, per ogni autospazio $V_\lambda(f)$, $V_\lambda(f_{\mathbb{C}})$ è il suo complessificato, una base ortonormale che diagonalizza f è una base unitaria reale di $V_{\mathbb{C}}$ che diagonalizza $f_{\mathbb{C}}$.

Se α e $\bar{\alpha}$ sono una coppia di autovalori complessi non reali, $V_\alpha(f_{\mathbb{C}}) \oplus V_{\bar{\alpha}}(f_{\mathbb{C}})$ è il complessificato di $\ker q_\alpha(f)$. Il punto chiave è che se $\mathcal{B}$ è una base unitaria di $V_\alpha(f_{\mathbb{C}})$, allora $\bar{\mathcal{B}}$ è una base unitaria di $V_{\bar{\alpha}}(f_{\mathbb{C}})$ e $\{\mathcal{B}, \bar{\mathcal{B}}\}$ è una base unitaria di $V_\alpha(f_{\mathbb{C}}) \oplus V_{\bar{\alpha}}(f_{\mathbb{C}})$. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ formata dalle parti reali e immaginarie normalizzate, è una base ortonormale per $\ker q_\alpha(f)$. La matrice $M^{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}(f)$ è la forma matriciale normale cercata.

Per esempio, se f è anti-autoaggiunto (in termini matriciali, $A = -A^t$ è antisimmetrica), allora gli autovalori sono tutti immaginari puri, ib, e la forma normale è diagonale a blocchi, con lungo la diagonale blocchi 2×2 della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$$

in numero uguale alla molteplicità degli autovalori.

Se $f \in O(\Phi)$, con autovalori unitari, reali ± 1, o non reali $e^{i\theta}$, allora la forma normale è diagonale a blocchi con lungo la diagonale ± 1, e dei blocchi 2×2 della forma

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

ancora una volta in numero uguale alla molteplicità degli autovalori.

In altre parole, V si decompone in somma diretta/ortogonale di sottospazi f-invarianti di dimensione 1 o 2. Su quelli di dimensione 1, f è l'identità oppure la riflessione $x \to -x$. Su quelli di dimensione 2, f è **geometricamente** una rotazione. La restrizione di f ad ogni sottospazio della decomposizione si estende su tutto V ponendola uguale all'identità sugli altri sottospazi. Gli endomorfismi così ottenuti commutano tra loro e f è la composizione di questi endomorfismi, in un ordine arbitrario.

In generale, la forma normale ‘ortogonale’ di un endomorfismo normale reale f è uguale alla sua forma di Jordan reale in quanto endomorfismo con complessificato $f_{\mathbb{C}}$ diagonalizzabile; di più essa può essere realizzata per mezzo di basi ortonormali.

Sul gruppo ortogonale.

K di caratteristica $\neq 2$ arbitrario. (V, Φ) non degenere, $\dim V = n$, $O(\Phi)$ il gruppo ortogonale.

Dato $v \in V$ non isotropo, posto $W = \mathrm{Span}\{v\}$, $V = W \perp W^{\perp}$. Ogni $w = \lambda v + z$, $z \in W^{\perp}$, in modo unico. Poniamo

$$\rho_v : V \to V,\ \rho_v(w) = -\lambda v + z$$

essa è chiamata la *riflessione* parallela a v.

$W^{\perp}$ è il luogo dei punti fissi di ρ_v;

$\rho_v^2 = \mathrm{id}$, $\rho_v \in O(\Phi)$.

In una base ortonormale adattata alla decomposizione in somma diretta/ortogonale, ρ_v è rappresentata dalla matrice

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{pmatrix}$$

Le riflessioni generano $O(\Phi)$. Cioè

(1) Ogni $f \in O(\Phi)$, *è composizione di un numero finito di riflessioni:*

$f = \rho_1 \circ \rho_2 \circ \cdots \circ \rho_k$.

(2) Esiste una minima costante $C(n) \in \mathbb{N}$ *tale che ogni* $f \in O(\Phi)$ *può essere espresso come composizione di* $k \leq C(n)$ *riflessioni.*

Dim. (1) Per ogni riflessione ρ, $id = \rho^2$. Quindi supponiamo $f \neq id$.

Per induzione su $n = \dim V$.

Per $n = 1$, v base, $f(v) = \lambda v$,

$\Phi(v, v) = \lambda^2 \Phi(v, v)$, quindi $\lambda = \pm 1$.

$\dim V = n$.

Supponiamo esista v non isotropo tale che $f(v) = v$. $V = W \perp W^\perp$ come sopra. $W^\perp$ è f-invariante. Allora, per induzione, $f|W$ è composizione di riflessioni $\tilde{\rho}_j$ per $\Phi|W^\perp$. Se $\tilde{W}_j \subset W$ è il luogo dei punti fissi di $\tilde{\rho}_j$, allora $W_j :=$ Span$(\{v\} \cup \tilde{W}_j)$ è il luogo di una riflessione $\rho_j \in O(\Phi)$ e f è composizione di queste ρ_j.

In generale, sia v non isotropo, $f(v) \neq v$.

Supponiamo che $w := f(v) - v$ sia non isotropo. Allora $\rho_w(f(v)) = v$. Infatti,

$$f(v) = (f(v) - v)/2 + (f(v) + v)/2$$

$$\Phi(v + f(v), f(v) - v) =$$

$$\Phi(v, f(v)) - \Phi(v, v) +$$

$$\Phi(f(v), f(v)) - \Phi(f(v), v) = 0.$$

Quindi,

$$\rho_w(f(v)) = -(f(v) - v)/2 + (f(v) + v)/2 = v.$$

Per il caso precedente $\rho_w \circ f$ è composizione di riflessioni e quindi anche $f = \rho_w \circ \rho_w \circ f$ lo è.

Se $f(v) - v$ è isotropo, allora $f(v) + v$ non è isotropo.

Infatti (indichiamo con $q = q_\Phi$ la forma quadratica associata) se fossero entrambi isotropi,

$$q(f(v) - v) = q(f(v)) - 2\Phi(v, f(v)) + q(v) = 0$$

$$q(f(v) + v) = q(f(v)) + 2\Phi(v, f(v)) + q(v) = 0$$

seguirebbe $4q(v) = 0$, mentre $q(v) \neq 0$ perché per ipotesi v è non isotropo. Se $w := f(v) + v$ è non isotropo, con calcoli simili a quelli di prima, abbiamo $\rho_w(f(v)) = -v$. Cioè

$$-id \circ \rho_w \circ f(v) = v$$

quindi $-id \circ \rho_w \circ f$ è composizione di riflessioni. Per concludere basta dimostrare che $-id$ è composizione di riflessioni. Infatti, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortogonale per Φ, con rispettive riflessioni $\rho_j = \rho_{v_j}$, allora

$$-id = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_n.$$

(2) Basta ripercorrere la dimostrazione per induzione. $C(1){=}1$. Supponendo di avere determinato $C(n-1)$, nel caso peggiore (quello in cui interviene $-id$) otteniamo la stima $C(n) \leq (n+1) + C(n-1)$.

Osservazioni su $C(n)$

In generale $C(n) \geq n$. Infatti $-id$ non può essere realizzata con meno di n riflessioni. Infatti Fix($-id$) = $\{0\}$, mentre il luogo di punti fissi della composizione di $k < n$ riflessioni ha dimensione $\geq n - k$.

Se ci restringiamo ai **prodotti anisotropi**, allora $C(n) = n$. Nel caso dei prodotti scalare reali definiti positivi questo si può ottenere anche usando la forma normale matriciale degli elementi di $O(n, \mathbb{R})$ ottenuta in precedenza. Tutto è ridotto a dimostrare che una rotazione R_θ di $\mathbb{R}^2$ è composizione di due riflessioni (esercizio).

Si può dimostrare (non è ovvio) che **vale sempre** $C(n) = n$.

Estensione delle isometrie e completamento non degenere.

(V, Φ) non degenere come al solito. Due sottospazi W_1 W_2 di V si dicono *congruenti* se esiste $f \in O(\Phi)$ tale che $f(W_1) = W_2$.

Una condizione **necessaria** affinché siamo congruenti è che $(W_1, \Phi|W_1)$ $(W_2, \Phi|W_2)$ siano (astrattamente) isometrici (infatti $f|W_1$ è una isometria).

Diremo semplicemente che W_1 e W_2 sono isometrici, la restrizione di Φ essendo sottintesa.

Teorema di estensione delle isometrie astratte

W_1 e W_2 sono congruenti se e solo se esite una isometria (astratta) $g : W_1 \to W_2$. Infatti, in tal caso, esiste $f \in O(\Phi)$ tale che $f|W_1 = g$, f **estende** g.

La dimostrazione completa sarà piuttosto laboriosa. Cominciamo con il caso particolare in cui $\Phi|W_j$ *siano non degeneri*.

Estensione delle isometrie nel caso non degenere. Per induzione su $m = \dim W_j$. Se $m = 0$, ogni $f \in O(\Phi)$ è tale che $f(0) = 0$. Sia $\dim W_1 = m$. Fissiamo una base ortogonale di W_1, $\{w_1, \dots, w_m\}$. Poiché W_1 è non degenere, ogni w_j è non isotropo. Dato che g è una isometria, le stesse considerazioni valgono per la base

$\{u_1 = g(w_1), \dots, u_m = g(w_m)\}$ di W_2.

Poniamo $W_1' = \mathrm{Span}\{w_1, \dots, w_{m-1}\}$ e $W_2' = \mathrm{Span}\{u_1, \dots, u_{m-1}\}$.

Possiamo applicare l' ipotesi induttiva all' isometria $g' := g| : W_1' \to W_2'$. Estendiamo g' per mezzo di $h \in O(\Phi)$.

Se vale anche che $h(w_m) = u_m$, allora h estende g e abbiamo finito.

Se invece $h(w_m) \neq u_m$, ragionando come nella dimostrazione del Teorema sulle riflessioni che generano, i vettori $h(w_m) - u_m$ e $h(w_m) + u_m$ sono tra loro ortogonali e non possono essere entrambi isotropi. Se $u := h(w_m) - u_m$ è non isotropo, allora $\rho_u(h(w_m)) = u_m$, mentre $\rho_u \circ h|W_1' = h|W_1' = g'$. Quindi $\rho_u \circ h$ è una estensione voluta di g. Se $u = h(w_m) + u_m$ è non isotropo, allora $\rho_u \circ h(w_m) = -u_m$, e si conclude in modo analogo.

Per ricondurre il caso generale a quello non degenere, studiamo preliminarmente in modo sistematico come si possa estendere un sottospazio W di V ad un sottospazio non degenere.

$W \subset \tilde{W} \subset V$ si dice una **estensione non degenere** se $\tilde{W}$ è non degenere. Diciamo che $W \subset \hat{W}$ è un **completamento non degenere** se è una estensione non degenere di dimensione minima. Poiché $W \subset V$ è una estensione non degenere, sicuramente esistono completamenti non degeneri di W. Vogliamo capire come sono fatti.

Un sottospazio $H \subset V$ è detto un **piano iperbolico** se $\dim H = 2$, è non degenere e non è anisotropo.

Ogni piano iperbolico ammette **basi iperboliche** *cioè tali che* $\Phi|H$ *è rappresentato dalla matrice*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Dim. Sia $\{v, w\}$ una base tale che v sia isotropo. Poiché Φ è non degenere, $\Phi(v, w) \neq 0$. Cerchiamo una base iperbolica della forma

$$\{v, xv + yw\}.$$

Imponiamo

$$\Phi(v, xv + yw) = y\Phi(v, w) = 1, \; y = \Phi(v, w)^{-1}$$

$\Phi(xv + yw, xv + yw) = 2x + y^2\Phi(w, w) = 0$, $x = -(1/2)y^2\Phi(w, w)$.

Se $W \subset V$ è già non degenere poniamo

$\widehat{W} = W$.

Altrimenti possiamo scrivere W nella forma

$W = U \oplus \mathrm{Rad}(W)$

Sappiamo che U è non degenere e univocamente determinato a meno di isometria (canonica).

Fissiamo una base ortogonale $\mathcal{D}$ di W adattata alla decomposizione

$\{u_1, \ldots, u_m, z_1, \ldots z_k\}$, $\dim \mathrm{Rad}(W) = k$.

Estendiamo $\mathcal{D}$ ad una base di V, e rappresentiamo la sua base duale per mezzo di Φ. In particolare sia d_1 il vettore che rappresenta z_1^*. Allora $H_1 = \mathrm{Span}\{z_1, d_1\}$ è un piano iperbolico con matrice rappresentativa $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$

Possiamo modificare d_1 ottenendo t_1 tale che $\{z_1, t_1\}$ sia una base iperbolica di H_1.

$U_1 = U \perp H_1$ è una decomposizione in somma diretta/ortogonale, U_1 è non degenere.

Iteriamo la costruzione partendo da

$W_1 := U_1 \perp \mathsf{Span}\{z_2, \dots, z_k\}$.

Chiaramente $W \subset W_1$. Iterando k-volte otteniamo alla fine

$$W \subset U \perp H_1 \perp \cdots \perp H_k$$

che è una estensione non degenere di W. In effetti è un completamento non degenere, cioè è di dimensione minima. Infatti se $W \subset \tilde{W}$ è una estensione non degenere, possiamo implementare la costruzione dentro $\tilde{W}$ ottenendo una copia di

$$\hat{W} := W \subset U \perp H_1 \perp \cdots \perp H_k \subset \tilde{W},$$

$\dim \tilde{W} \geq \dim \hat{W}$. Se $\tilde{W}$ è un completamento allora $\tilde{W} = \hat{W}$. Abbiamo così ottenuto

I completamenti non degeneri $\widehat{W}$ di W hanno dimensione

$$\dim \widehat{W} = \dim W + \dim \mathrm{Rad}(W)$$

e sono tutti della forma

$$\widehat{W} = U \perp H_1 \perp \cdots \perp H_k.$$

Possiamo dire di più.

Unicità a meno di congruenza di $\widehat{W}$. Siano
$U \perp H_1 \perp \cdots \perp H_k$

$U' \perp H'_1 \perp \cdots \perp H'_k$

due tali completamenti. Essi sono astrattamente isometrici, mediante una isometria g tale che $g(U) = U'$, $g(H_j) = H'_j$. Per il teorema di estensione già dimostrato nel caso non degenere, possiamo concludere che essi sono congruenti tramite un $f \in O(\Phi)$ che estende g.

Il caso generale del teorema di estensione. Sia $g : W_1 \to W_2$ una isometria astratta. Se $W_1 = U_1 \perp \mathrm{Rad}(W_1)$, allora

$$W_2 = g(U_1) \perp g(\mathrm{Rad}(W_1)) := U_2 \perp \mathrm{Rad}(W_2).$$

Se $\mathcal{D}_1$ è una base ortogonale adattata di W_1, allora $\mathcal{D}_2 = g(\mathcal{D}_1)$ lo è di W_2. Siano $\hat{W}_1$ e $\hat{W}_2$ rispettivi completamenti non degeneri ottenuti applicando la costruzione a $\mathcal{D}_1$ e $\mathcal{D}_2$. È allora chiaro che g può essere intanto estesa ad una isometria $\hat{g} : \hat{W}_1 \to \hat{W}_2$. Applichiamo infine il teorema di estensione nel caso non degenere a $\hat{g}$, ottenendo $f \in O(\Phi)$ che estende $\hat{g}$ e quindi g.

Decomposizioni di Witt.

(V, Φ), Φ non degenere, come al solito.

L' **indice di Witt**

$w = w(\Phi) = \max\{\dim W; W \subset V,\ \Phi|W = 0\}$.

$w = 0$ se e solo se Φ è anisotropo. w è chiaramente invariante per isometrie. Si noti che $w(\Phi) = w(-\Phi)$.

Sia W, $\dim W = w(\Phi)$, $\Phi|W = 0$. Allora ogni suo completamento non degenere è la somma diretta/ortogonale di w piani iperbolici.

$\widehat{W} = H_1 \perp \cdots \perp H_w$

poniamo $A = \widehat{W}^{\perp}$; allora

$V = A \perp H_1 \perp \cdots \perp H_w$

dove A è **anisotropo**: infatti, se $v \neq 0$ in A fosse isotropo, $\Phi|(\text{Span}\{v\} \perp W) = 0$ contro la definizione di $w(\Phi)$.

Una decomposizione in somma diretta/ortogonale di V con queste proprietà è detta una *decomposizione di Witt* di (V, Φ). Abbiamo appena dimostrato che **esistono** decomposizioni di Witt con $w = w(\Phi)$ piani iperbolici.

Unicità della decomposizione di Witt a meno di congruenza.

Siano

$$V = A \perp H_1 \perp \cdots \perp H_w$$

$$V = A' \perp H_1' \perp \cdots \perp H_s'$$

due decomposizione di Witt. Allora $s = w$ *ed esse sono congruenti, cioè esiste* $f \in O(\Phi)$ *tale che* $f(A) = A'$, $f(H_j) = H_j'$.

Dim. $s \leq w$ perché la somma diretta/ortogonale di s piani iperbolici contiene un sottospazio di dimensione s su cui Φ si annulla. Supponiamo per assurdo che $s < w$.

$H_1 \perp \cdots \perp H_s$ e $H_1' \perp \cdots \perp H_s'$

sono astrattamente isometrici, quindi sono congruenti mediante un $f \in O(\Phi)$. Ma allora

$f(A \perp H_{s+1} \perp \cdots \perp H_w) = A'$,

e questo è impossibile perché A' è anisotropo. Quindi $s = w$. Lo stesso argomento mostra infine che le due decomposizioni sono congruenti.

L'indice e la decomposizione di Witt (che valgono su un campo K arbitrario, car $K \neq 2$) riducono lo studio dei prodotti scalare non degeneri a meno di isometria al caso dei prodotti anisotropi. La struttura di quest'ultimi dipende fortemente dalle proprietà algebriche del campo.

Nel caso di $\mathbb{R}$ e di $\mathbb{C}$ abbiamo già caratterizzato gli anisotropi, quindi possiamo completare la classificazione usando questi nuovi invarianti.

Su $\mathbb{R}$ i prodotti anisotropi sono quelli definiti (positivi o negativi).

Poniamo $\sigma(\Phi)$ il **segno della parte anisotropa** nella decomposizione di Witt. Allora la coppia

$(w(\Phi), \sigma(\Phi))$

è un invariante completo. In particolare, possiamo esprimere la segnatura di Φ per mezzo di $(w(\Phi), \sigma(\Phi))$. Osservando che ogni piano iperbolica reale ha segnatura $(1, 1)$, se, per esempio, $\sigma(\Phi) > 0$, allora

$i_+ = \dim V - w(\Phi)$, $i_- = w(\Phi)$.

Analogamente se $\sigma(\Phi) < 0$.

Viceversa, possiamo ricavare segno e indice di Witt dalla segnatura.

$w = \min\{i_+, i_-\}$, $\sigma = \frac{i_+ - i_-}{|i_+ - i_-|}$

Su $\mathbb{C}$ ritroviamo che l'unico invariante per i prodotti non degeneri è la dimensione n dello spazio. Però la teoria di Witt permette di distinguere in modo intrinseco il caso n pari dal caso n dispari, nel senso che nella dicomposizione di Witt compaiono solo i piani iperboloci oppure una parte anisotropa che sappiamo essere necessariamente 1-dimensionale.