Trasformazioni affini

V spazio vettoriale su K, $\dim V = n$.

Ogni $w \in V$ definisce la **traslazione**

$\tau_w : V \to V$, $\tau_w(v) := v + w$.

τ_w è lineare se e solo se $w = 0$.

Indichiamo con

$\mathcal{T}(V)$

l'insieme di tutte le traslazioni.

$\tau : V \to \mathcal{T}(V)$, $w \to \tau_w$

è bigettiva.

$(\mathcal{T}(V), \circ)$ *è un gruppo di trasformazioni dell'insieme* V

$\tau : (V, +) \to (\mathcal{T}(V), \circ)$

è un isomorfismo di gruppi abeliani.

Infatti

$$\tau_{w+z}(v) = v + (w + z) = (v + w) + z = \tau_z \circ \tau_w(v)$$

$$\tau_{w+z} = \tau_{z+w} = \tau_w \circ \tau_z$$

$$\tau_0 = \mathrm{id}$$

$$\tau_{-w} = \tau_w^{-1}.$$

Indichiamo con

Aff(V)

il gruppo di trasformazioni dell'insieme V generato da $GL(V) \cup \mathcal{T}(V)$. Per definizione ogni elemento $f \in$ Aff(V) è la composizione di un numero finito (ma arbitrario) di trasformazioni che appartengono a $GL(V)$ o $\mathcal{T}(V)$:

$$f = g_1 \circ g_2 \circ \cdots \circ g_k, \; k \in \mathbb{N}, \; g_j \in GL(V) \cup \mathcal{T}(V).$$

$$f^{-1} = g_k^{-1} \circ \cdots \circ g_1^{-1} \in \mathrm{Aff}(V).$$

Aff(V) è detto il **gruppo delle trasformazioni affini di V**

Se $g \in GL(V)$, $w \in V$

$$g \circ \tau_w(v) = g(v+w) = g(v)+g(w) = \tau_{g(w)} \circ g(v)$$

$$(\tau_w \circ g)^{-1}(v) = g^{-1} \circ \tau_{-w}(v) = \tau_{g^{-1}(-w)} \circ g^{-1}(v)$$

Se per ogni $v \in V$,

$$\tau_w \circ g(v) = g(v) + w = g'(v) + w' = \tau_{w'} \circ g'(v)$$

allora $g(0) + w = 0 + w = 0 + w' = g'(0) + w'$, $w = w'$; $g(v) - g'(v) = 0$, $g = g'$.

Ne segue che

Ogni $f \in \mathsf{Aff}(V)$ *può essere espressa in modo unico nella forma*

$$f = \tau_w \circ g,\ w \in V,\ g \in GL(V).$$

$$(\tau_w \circ g) \circ (\tau_z \circ h)(v) = g \circ h(v) + (w + g(z)) =$$

$$\tau_{w+g(z)} \circ (g \circ h)$$

Sull' *insieme* prodotto

$V \times GL(V)$

mettiamo l'operazione di **prodotto semi-diretto**

$(w, g) * (z, h) := (g(z) + w, g \circ h)$

Allora $(V \times GL(V), *)$ è un gruppo (non abeliano)

$\phi : (V \times GL(V), *) \to (\mathsf{Aff}(V), \circ)$, $\phi(w, g) = \tau_w \circ g$

è un isomorfismo di gruppi.

Per ogni sottogruppo G di $GL(V)$, possiamo restringere la struttura di prodotto semi-diretto

$$(V \times G, *)$$

e il sottogruppo $\phi(V \times G)$ di $\mathrm{Aff}(V)$ è detto l'estensione affine di G.

Per esempio, se (V, Φ) è uno spazio Euclideo, allora

$$\mathrm{Isom}(V, d) = \phi(V \times O(\Phi))$$

Sia $f : V \to W$ lineare, $b \in W$. L' equazione

$$f(v) = b$$

può non avere soluzioni (se $b \notin \mathrm{Im}(f)$), oppure se v_0 è una soluzione particolare dell'equazione, allora l'insieme delle soluzioni è uguale a

$$\tau_{v_0}(\ker f)$$

Se $V = K^n$, $W = K^m$, $B \in K^m$, $f(X) = AX$, ritroviamo la discussione usuale del sistema lineare $AX = B$.

Se $b \neq 0$, l'insieme delle soluzioni non è un sottospazio vettoriale di V; dobbiamo accettare la possibilità che sia l'insieme $\emptyset$ e in generale è l' immagine di un sottospazio vettoriale mediante una traslazione (non lineare).

Avendo ampliato il gruppo di trasformazione abbiamo modificato la natura dello spazio.

Questo ampliamento si impone in situazioni molto naturali.

Il vettore nullo $0 \in V$ è un **punto speciale** dello **spazio vettoriale** V. Questo si può evidenziare mediante l'azione di $GL(V)$.

Per ogni insieme X, ogni gruppo di trasormazioni G di X e ogni $x \in X$, lo *stabilizzatore* di x è il sottogruppo di G definito da

$$st(x) := \{g \in G; g(x) = x\}$$

Allora 0 è l'unico vettore v tale $st(v) = GL(V)$. Se $v \neq 0$, $st(v)$ è isomorfo al sottogruppo di $GL(n, K)$ formato dalle matrici che hanno la prima colonna uguale a $(1, 0, \ldots, 0)^t$.

Se $v, v' \neq 0$, esiste $g \in GL(V)$ tale che $g(v) = v'$ ($GL(V)$ agisce in modo *transitivo* su $V \setminus \{0\}$). Mentre $g(0) = 0$ per ogni g.

D'altra parte, Aff(V) agisce in modo transitivo su tutto V: per ogni coppia $v, v' \in V$ esiste una trasformazione affine f (in effetti, una traslazione) tale che $f(v) = v'$.

$st(v) \to st(v')$, $g \to f \circ g$

È un isomorfismo di gruppi; gli stabilizzatori sono tutti isomorfi a $GL(V)$.

Rispetto alle trasformazioni affini non ci sono più punti speciali.

Un'altra rappresentazione matriciale delle trasformazioni affini di K^n

Per quanto detto prima ogni trasformazione affine di K^n è della forma

$$f(X) = PX + B,\ P \in GL(n, K),\ B \in K^n$$

quindi è codificata dalla coppia

$$(B, P) \in K^n \times GL(n, K),$$

quest' ultimo munito del prodotto semi-diretto.

Consideriamo K^{n+1} munito di coordinate canoniche

$Y = (y_1, \ldots, y_n, y_{n+1})^t$.

K^n con coordinate

$X = (x_1, \ldots, x_n)^t$.

Fissiamo l'inclusione

$K^n \subset K^{n+1}$,

$X = (x_1, \ldots, x_n)^t \to (x_1, \ldots, x_n, 1) = (X^t, 1)^t$

cioè K^n viene identificato con l'iperpiano

$\mathcal{P} = \{Y \in K^{n+1}; y_{n+1} = 1\}$.

Sia $G_{\mathcal{P}} = \{h \in GL(n+1, K); h(\mathcal{P}) = \mathcal{P}\}$

È un sottogruppo di $GL(n+1, K)$. Mediante l'identificazione di $\mathcal{P}$ con K^n fissata prima, $G_{\mathcal{P}}$ è un gruppo di trasformazioni di K^n. Si verifica che

$G_{\mathcal{P}} =$

$$\{\begin{pmatrix} P & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(n+1, n); P \in GL(n, K), B \in K^n\}$$

Infatti, se $h \in G_{\mathcal{P}}$, $h(e_{n+1}) = (B^t, 1)^t$.

Per $j = 1, \ldots, n$,

$h(e_j + e_{n+1}) = H_j + (B^t, 1)^t = (A_j^t, 1)^t$

$H_j = ((A_j - B)^t, 0)$.

$\psi : (K^n \times GL(n, K), *) \to G_{\mathcal{P}}$

$$\psi(B, P) = \begin{pmatrix} P & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

è un isomorfismo di gruppi; l'azione di Aff(n, K) su K^n coincide con quella di $G_{\mathcal{P}}$.

Dim. ψ è evidentemente bigettiva. Basta verificare che è un omomorfismo di gruppi.

$$\psi(B,P)\psi(B',P') = \begin{pmatrix} P & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P' & B' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} PP' & PB' + B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi((B,P) * (B',P'))$$

Il gruppo delle trasformazioni affini di V è il gruppo di trasformazioni che preserva una struttura che incorpora ma è diversa da quella di spazio vettoriale.

Problema. *Esplicitare questa struttura*.

Spazi affini e applicazioni affini

Sia V uno spazio vettoriale su K.

Un insieme non vuoto A è munito di **una struttura di spazio affine sullo spazio vettoriale** *V se è data una applicazione*

$\phi : A \times A \to V$, $\phi(P, Q) := \vec{PQ}$ *tale che*

1. *Per ogni punto $P \in A$, l'applicazione*

   $\phi_P : A \to V$, $\phi_P(Q) = \vec{PQ}$

   è bigettiva.

2. *Per ogni P, $\phi_P(P) = 0$.*

3. *Per ogni terna di punti $P, Q, R \in A$,*

   $\vec{PQ} + \vec{QR} + \vec{RP} = 0$

$A := V$ è in modo naturale uno spazio affine su V mediante

$$\vec{PQ} := Q - P$$

Questa è detta la *struttura affine standard* sullo spazio vettoriale V.

Sia (A, ϕ) uno spazio affine su V (spesso ϕ è sottintesa).

Per ogni coppia di punti $P, Q \in A$,

$$\vec{PQ} = -\vec{QP}$$

Si ottiene applicando la terza proprietà di ϕ alla terna P, Q, P, usando anche $\vec{PP} = 0$.

Nel caso $A = V$ su V, per via algebrica si verifica

$$\vec{PQ} = Q - P = -(P - Q) = -\vec{QP}$$

Pe ogni $v \in V$, $P \in A$

$Q := P + v \in A$

indica l'unico punto $Q \in A$ tale che $v = \vec{PQ}$.

Nel caso $A = V$ su V, $Q = P + v$ se e solo se $v = Q - P$.

Nel caso di $A = V$ *su* V*, molte affermazioni possono essere verificate per via algebrica. Ma saranno derivate in generale come conseguenza delle proprietà assiomatiche.*

Per esempio:

Per ogni $P \in A$, $v, w \in V$

$$P + (v + w) = (P + v) + w$$

Nel caso di $A = V$ su V, non è altro che la *proprietà associativa* di $(V, +)$. Per esercizio, verificarlo in generale usando gli assiomi.

L'idea è che per ogni punto $P \in A$, per mezzo di ϕ_P possiamo "sollevare" su A la struttura dello spazio vettoriale V in modo che P ne risulti l'origine.

$A \times A = \cup_{P \in A}(\{P\} \times A)$

può essere pensato come un "pacchetto" di spazi vettoriali (copie di V) con origine variabile.

Situazioni (familiari?) in cui emerge la struttura affine di $\mathbb{R}^n$.

Sia $t \to (\phi(t), \psi(t)) := f(t)$ la legge del moto di un punto in $\mathbb{R}^2$. $P_0 = f(t_0)$ è la posizione del punto all'istante t_0.

$$(P_0, (\phi'(t_0), \psi'(t_0))^t) := (P_0, v(t_0)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$$

esprime la velocità istantanea (vettoriale) del punto all'istante t_0. È un vettore tangente alla traiettoria del punto, nel punto P_0.

Data $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(P, F(P)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ è un *campo di vettori* su $\mathbb{R}^2$. Dato $P_0 \in \mathbb{R}^2$, ci chiediamo se esiste $t \to f(t)$ come sopra tale che $f(0) = P_0$ e per ogni $t \in \mathbb{R}$, $v(t) = F(f(t))$. È un esempio di *equazione differenziale ordinaria*. Il contesto affine è naturale per formulare questioni di questo tipo.

Sia $A : \mathbb{R}^n \to M(n, \mathbb{R})$ tale che per ogni $P \in \mathbb{R}^n$, $A(P)$ è simmetrica e definita positiva. Allora $(P, A(P))$ è un *campo di prodotti scalari euclidei*, uno per ogni spazio vettoriale $\{P\} \times \mathbb{R}^n$, che varia al variare del punto P. Quando consideriamo, per esempio la geometria euclidea standard su $\mathbb{R}^2$, consideriamo piuttosto il *campo costante* $A(P) = I$. Questo è coerente con il fatto che $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^2, d)$ è l'estensione affine di $O(2, \mathbb{R})$.

Quando consideriamo la geometria Lorentziana su $\mathbb{R}^{3+1}$ (che modellizza lo *spazio-tempo* della relatività ristretta), consideriamo piuttosto il *campo costante*

$$A(P) = J = \begin{pmatrix} I_3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e come campo di 'isometrie' l'estensione affine di $O(J)$, detta il *Gruppo di Poincaré*.

Se $t \to f(t) \in \mathbb{R}^{3+1}$ è la legge oraria di un punto materiale che si muove in questo *spazio-tempo*, una prima richiesta del modello menzionato è che il vettore velocità $v(t) \in \mathbb{R}^4$ sia di *tipo tempo* per ogni t, $v(t)^t J v(t) < 0$.

Combinazioni affini di punti

Siano $P_0, \ldots, P_k$ punti di A, $a_0, \ldots, a_k \in K$. Allora

$P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \vec{P_0 P_j} \in A$

Vogliamo determinare condizioni necessarie e sufficienti affinché questo punto non dipenda dall'ordimento dei punti dati.

Cioè

$P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j \vec{P_i P_j}$

deve dare lo stesso punto per ogni i.

Usando la terna P_0, P_i, P_j, abbiamo

$$\vec{P_0P_i} + \vec{P_iP_j} + \vec{P_jP_0} = 0$$

da cui

$$\vec{P_0P_j} = \vec{P_0P_i} + \vec{P_iPj}$$

Allora

$$P_0 + (\sum_{j=0}^{k} a_j)\vec{P_0Pi} + \sum_{j=0}^{k} a_j\vec{P_iP_j} =$$

$$P_i + \sum_{j=0}^{k} a_j\vec{P_iP_j}$$

se e solo se

$$\sum_{j=0}^{k} a_j = 1$$

Se $\sum_{j=0}^{k} a_j = 1$

$\sum_{j=0}^{k} a_j P_j := P_0 + \sum_{j=0}^{k} a_j \vec{P_0 P_j}$

è **ben definita** ed è detta una **combinazione affine** dei punti.

Punto medio e baricentro

Se il campo K ha la proprietà che per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, $n = 1 + 1 + \cdots + 1 \neq 0$ (si dice che K è di caratteristica 0) allora per ogni insieme di punti $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$ è definita la combinazione affine

$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{n} P_j$

Il punto risultante si dice il **baricentro** dei punti dati. In particolare se $n = 1$, esso è il **punto medio** dei punti P_0, P_1.

Se $A = \mathbb{R}^m$, ritroviamo nozioni che di solito sono definite usando la **distanza euclidea**. Ma in effetti sono oggetti che dipendono solo dalla **struttura di spazio affine** di $\mathbb{R}^m$.

Sottospazi affini

Un sottoinsieme E di A è detto un **sottospazio affine** *se è vuoto, oppure è chiuso per le combinazioni affini dei suoi punti.*

Se X è un sottoinsieme non vuoto di A, allora Span(X), *il* **sottospazio affine generato da X**, *è definito come l'intersezione dei sottospazi affini che lo contengono, equivalentemente come l'insieme delle combinazioni affini dei suoi punti.*

(1) Se W è un sottospazio vettoriale di V, $P_0 \in A$, allora $E := P_0 + W$ è un sottospazio affine di A. $P_0 = P_0 + 0 \in E$.

(2) Se E un sottospazio affine non vuoto di A, $P_0 \in E$, allora $W_{P_0} := \phi_{P_0}(E)$ è un sottospazio vettoriale di V tale che $E = P_0 + W_{P_0}$.

(3) $W := W_{P_0}$ non dipende dalla scelta di $P_0 \in E$. $W := T(E)$ è detto la **giacitura** *o anche* **lo spazio vettoriale tangente** *di E.*

Dim. (1) Sia

$\sum_{j=1}^{n} a_j(P_0 + w_j) = \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j =$

$a_0(P_0 + 0) + \sum_{j=1}^{n} a_j Q_j$, $a_0 = 0$

una combinazione affine di punti di $P_0 + W$. Allora

$P_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j \vec{P_0 Q_j} = P_0 + \sum_{j=1}^{n} a_j w_j \in P_0 + W$

perché W è chiuso per combinazioni lineari.

(2) Sia $w = \sum_j a_j w_j = \sum_j a_j \vec{P_0 Q_j}$, $Q_j \in E$, una combinazione lineare di vettori di W_{P_0}. Allora

$w = \phi_{P_0}((1 - \sum_j a_j)P_0 + \sum_j a_j Q_j) \in W_{P_0}$

perché E è chiuso per combinazioni affini.

(3) Siano $P, P', Q \in E$.

$\vec{PP'} + \vec{P'Q} + \vec{QP} = 0$

$\vec{P'Q} = \vec{PQ} - \vec{PP'} \in W_P$, $W_{P'} \subset W_P$.

Scambiando i ruoli, $W_P \subset W_{P'}$.

Se E è un sottospazio affine non vuoto di A, la restrizione

$$\phi_| : E \times E \to T(E)$$

realizza E come spazio affine su $T(E)$.

$$T(A) = V.$$

$A = V$ su V. Allora i sottospazi affini non vuoti sono tutti e soli della forma

$$E = \tau_v(W) = W + v,\ v = 0 + v \in E,$$

dove W è un sottospazio vettoriale di V, $W = T(E)$. Per ogni altro $v' \in E$, $E = \tau_{v'}(W)$.

Osservazione. Considerando $A = V$ su V “dimentichiamo” il ruolo speciale di $0 \in V$; nonostante questo 0 resta localizzato e utilizzabile se ci serve. D’altra parte, i sottospazi affini di $A = V$ sono **genuini** spazi affini, perché non c’ è modo di selezionare su di essi un punto (un’ “origine”) speciale.

La **dimensione** di un sottospazio affine non vuoto E di A è definita da

$$\dim E := \dim T(E)$$

Una *retta affine* di A è un sottospazio di dimensione 1.

Due sottospazi affini E e E' non vuoti sono *incidenti* se $E \cap E' \neq \emptyset$. In tal caso

$$T(E \cap E') = T(E) \cap T(E').$$

E è *parallelo* a E' se $T(E) \subset T(E')$, da cui $\dim E \leq \dim E'$.

Il parallelismo è una relazione di equivalenza sull'insieme dei sottospazi affini di dimensione fissata.

E e E' sono *ghembi* se non sono incidenti e non sono paralleli.

Grassmann affine

Siano E e F due sottospazi affini non vuoti di A. Definiamo

$$E + F := \mathrm{Span}(E \cup F).$$

Se E e F sono incidenti ritroviamo

$$\dim E + F = \dim E + \dim F - \dim E \cap F$$

e questo viene ricondotto al caso vettoriale considerando

$$T(E + F) = \phi_P(E + F) = T(E) + T(F)$$

per un qualsiasi $P \in E \cap F$.

Cosa succede se $E \cap F = \emptyset$? Rispondere per esercizio.

Applicazioni affini

Siano (A, ϕ) e (B, ψ) spazi affini sui K-spazi vettoriali V e W rispettivamente.

$f : A \to B$ *è una* **applicazione affine** *se per ogni combinazione affine di punti di* A,

$Q = \sum_j a_j Pj$,

si ha

$f(Q) = \sum_j a_j f(Pj)$.

(1) Sia $g: V \to W$ *lineare,* $P \in A$, $Q \in B$. *Allora*

$$f := \psi_Q^{-1} \circ g \circ \phi_P, \; f(X) = Q + g(\vec{PX})$$

è affine e $f(P) = Q$.

(2) Sia $f: A \to B$ *affine,* $f(P) = Q$.

Allora

$$g_P = \psi_Q \circ f \circ \phi_P^{-1} : V \to W$$

$$g_P(v) = \psi_Q(f(P + v))$$

è lineare.

(3) $g = g_P$ *non dipende dalla scelta di* $P \in A$ *ed è chiamata l'***applicazione lineare tangente** *di* f. *A volte si scrive* $g = df$ *ed è anche chiamata l'applicazione* **differenziale** *di* f

La dimostrazione, molto simile a quanto fatto per i sottospazi affini, è lasciata per esercizio.

$A = V$ su V, $B = W$ su W; ogni applicazione affine $f : A \to B$ è della forma

$$f(v) = w + g(v) = \tau_w \circ g(v)$$

dove $g : V \to W$ è lineare e $w = f(0) \in W$.

Ogni applicazione affine manda sottospazi affini in sottospazi affini e la dimensione non aumenta.

Per definizione, una applicazione $f : A \to B$ *è un* **isomorfismo affine** *se è affine, bigettiva e con inversa affine. Si verifica che* f *è un isomorfismo affine se e solo se è affine e il suo differenziale* df *è un isomorfismo di spazi vettoriali.*

Un isomorfismo affine manda sottospazi affini in sottospazi affini preservando la dimensione.

Insiemi di punti affinemente indipendenti

$P_0, P_1, \ldots, P_k$ in A si dicono affinemente indipendenti se i vettori $\vec{P_0P_1}, \ldots, \vec{P_0P_k}$ sono linearmente indipendenti.

La nozione è **ben definita**, cioè non dipende dall'ordinamento dei punti (la verifica, molto simile a quanto fatto per le combinazioni affini, è lasciata per esercizio).

Se $\dim A = n$, un insieme ordinato di $n + 1$ punti affinemente indipendenti $P_0, P_1, \ldots, P_n$ si dice una *base affine* di A. Ogni $Q \in A$ si scrive in modo **unico** come combinazione affine di tali punti

$Q = \sum_{j=0}^{n} a_j P_j$.

$(a_0, \ldots, a_n)$ sono le *coordinate affini* di Q rispetto alla base affine.

$A = K^n$ su $V = K^n$.

$(e_0 := 0, e_1, \ldots, e_n)$

è la sua **base affine canonica**.

A su V, B su W, $P_0, \ldots, P_n$ base affine di A, $Q_0, \ldots, Q_n \in B$.

Allora esiste ed è unica l'applicazione affine

$f : A \to B$

tale che $f(P_0) = Q_0, \ldots, f(P_n) = Q_n$.

f è un isomorfismo affine se e solo se $Q_0, \ldots, Q_n$ è una base affine di B.

Se A su V ha dimensione n, $P_0, \ldots, P_n$ è una base affine, allora

$$A \ni Q = \sum_j a_j P_j \to \sum_j a_j e_j \in K^n$$

definisce l'isomorfismo di passaggio alle coordinate affini rispetto alla base affine data.

Il rapporto semplice

Sia A uno spazio affine su V, $\dim A = 1$. A è detto una *retta affine*.

Data una terna ordinata di punti *distinti* di A, P_1, P_2, P_3, $\{P_1, P_2\}$ è una base affine di A, quindi

$$P_3 = P_1 + \lambda \vec{P_1 P_2}$$

per un unico $\lambda \in K$, $\lambda \neq 0, 1$.

$$\lambda := [P_1; P_2; P_3]$$

è detto il *rapporto semplice* della terna ordinata di punti.

Studiamo come cambia il rapporto semplice permutando i punti. Per ogni permutazione $\sigma \in S_3$,

$$\lambda_\sigma := [P_{\sigma(1)}; P_{\sigma(2)}; P_{\sigma(3)}]$$

Ricordiamo che il gruppo simmetrico S_3 ha 6 elementi. Il sottogruppo A_3 delle permutazioni pari è ciclico di ordine 3, formato dall'identità e due 3-cicli:

$$\text{id}, (123), (132) = (123)^2$$

inoltre ci sono tre *trasposizioni* legate dalle relazioni

$$(132)(23) = (13),\ (123)(23) = (12)$$

Per faciltare il calcolo, a meno di un isomorfismo affine (che ovviamente preserva il rapporto semplice), possiamo supporre $A = V$ su V, $\dim V = 1$.

$P_3 = P_1 + \lambda(P_2 - P_1)$, $\lambda = \frac{P_3 - P_1}{P_2 - P_1}$

$\lambda_{(123)} = \frac{P_1 - P_2}{P_3 - P_2} = \frac{1}{1-\lambda}$

$\lambda_{(132}) = \frac{P_2 - P_3}{P_1 - P_3} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\lambda}}$

$\lambda_{(23)} = \frac{P_2 - P_1}{P_3 - P_1} = \frac{1}{\lambda} := \mu$

$\lambda_{(12)} = \frac{1}{1-\mu}$

$\lambda_{(13)} = \frac{1}{1-\frac{1}{1-\mu}}$

Osserviamo inoltre che per ogni $t \neq 0$

$\lambda = [tP_1; tP_2; tP_3]$

Interpretazione geometrica sui complessi

Sia $A = \mathbb{C}$ su $\mathbb{C}$. Geometricamente, $\mathbb{C}$ è supportato dal piano $\mathbb{R}^2$. Sia z_0, z_1, z_2 una terna ordinata di punti distinti come sopra. Le trasformazioni affini di $\mathbb{C}$ sono della forma

$$w \to \rho e^{i\theta} w + w_0$$

quindi viste come trasformazioni di $\mathbb{R}^2$ sono composizioni di traslazioni, rotazioni e omotetie. Esse sono similitudini che preservano la misura degli angoli orientati. A meno di una tale trasformazione affine (che preserva il rapporto semplice), possiamo supporre che

$z_0 = 0, z_1 = 1, z_2 = z$, per cui

$$\frac{z_2 - z_0}{z_1 - z_0} = z := a + ib$$

Osserviamo che:

$$b = \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

I tre termini

$$(z, \frac{1}{1-z}, \frac{1}{1-\frac{1}{1-z}})$$

hanno la parte immaginaria dello stesso segno

$b = 0$ se e solo se i tre punti sono allineati su una retta reale.

Quindi, se i punti non sono allineai sulla stessa retta reale,

$$\{(z, \tfrac{1}{1-z}, \tfrac{1}{1-\frac{1}{1-z}}), z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}\}/A_3$$

cioè l' insieme di quelle terne ordinate *ciclicamente*, funziona come

spazio dei parametri per le classi di similitudine dei triangoli piani orientati

dove un triangolo è positivo (negativo) se la parte immaginaria del rapporto semplice dei suoi vertici ordinati ciclicamente è positiva (negativa).

Per evitare il quoziente modulo A_3, cioè per convertire l'ordinamento ciclico dei vertici dato dall'orientazione in un ordinamento lineare, occorre aggiungere all'orientazione un **vertice marcato**. Quindi $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ è lo spazio dei parametri delle classi di similitudine dei triangoli orientati e con vertice marcato.

Il rapporto semplice definisce una funzione

$$\lambda : K^3 \setminus \{z_j = z_i; j \neq i\} \to K \setminus \{0, 1\}$$

Vorremmo estendere questa funzione

$$\bar{\lambda} : K^3 \setminus \{z_0 = z_1 = z_3\} \to K$$

cioè ammettendo che due dei tre punti siano tra loro uguali.

È naturale porre

$$[z_0; z_1; z_0] = \frac{z_0 - z_0}{z_1 - z_0} = 0,$$

$$[z_1; z_0; z_0] = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_1} = 1 = \frac{1}{1 - 0}$$

ma

$$[z_0; z_0; z_1] = \frac{z_1 - z_0}{z_0 - z_0} = ?$$

Immaginando che sia una situazione limite di $\frac{z_1 - z_0}{z_n - z_0}$ per $z_n \to z_0$ possiamo porre formalmente

$[z_0; z_0; z_1] = \infty$

estendendo formalmente la relazione ciclica vista prima mediante

$\frac{1}{1-1} = 1/0 := \infty$, $\frac{1}{1-\infty} := 0$

Quindi $\bar{\lambda}$ è a valori in $K \cup \{\infty\}$, funziona se aggiungiamo a K un punto “all’infinito” ......

Caratterizzazione geometrica delle trasformazioni affini

Sia A uno spazio affine sul K-spazio vettoriale V. Aff(A) è il gruppo delle trasformazioni affini di A. Nel caso $A = V$ su V, ritroviamo le trasformazioni affini di V da cui siamo partiti.

Elenchiamo alcune proprietà che sono verificate da ogni $f \in \mathsf{Aff}(A)$

(1) f è bigettiva.

(2) f manda sottospazi affini in sottospazi affini preservando la dimensione.

(3) f manda rette affini in rette affini preservando il rapporto semplice.

(4) f manda rette affini in rette affini ed esisre una retta r tale che la restrizione $f|r$ preserva il rapporto semplice.

(5) f manda rette affini in rette affini.

Chiaramente (2) $\Rightarrow$ (5) $\Leftarrow$ (4) $\Leftarrow$ (3) .

Problema: *Determinare un sottoinsieme minimale di queste proprietà che sia* **sufficiente** *affinché* $f \in \mathsf{Aff}(A)$.

Vale il seguente cosiddetto

Teorema fondamentale della geometria affine.

Supponiamo che K sia di caratteristica diversa da 2, $\dim A \geq 2$, $f : A \to A$ **bigettiva**. *Allora*

(a) ((5) $\Rightarrow$ (2)) Se f manda rette in rette, allora manda sottospazi affini in sottospazi affini preservando la dimensione.

(b) ((4) $\Rightarrow f \in \mathsf{Aff}(A)$) Se f manda rette in rette ed esiste una retta r tale che la restrizione $f|r$ preserva il rapporto semplice, allora $f \in \mathsf{Aff}(A)$.

(c) ($K = \mathbb{R}$, (5) $\Rightarrow f \in \mathsf{Aff}(A)$) Se $K = \mathbb{R}$ e f manda rette in rette, allora $f \in \mathsf{Aff}(A)$.

Ci limitiamo a dimostrare il caso in cui

$\dim A = 2$.

In questo caso, (a) si banalizza. Ammettendo (a), il caso generale può essere ridotto al caso 2-dimensionale. Questo contiene già le idee principali della dimostrazione.

Poiché f manda rette in rette ed è bigettiva, allora manda rette parallele distinte in rette parallele distinte. Infatti se due rette parallele andassero in rette incidenti si perderebbe l'iniettività di f.

La dimostrazione comporta i seguenti passi.

(i) Si dimostra che se f bigettiva manda rette in rette, allora esistono un automorfismo del campo

$\phi : K \to K$

ed un automorfismo di gruppo abeliano

$a : (V, +) \to (V, +)$ tali che

1. $a(\lambda v) = \phi(\lambda) a(v)$;

2. Fissato $O \in A$, f è della forma

   $$f(P) = f(O) + a(\vec{OP})$$

Ammettendo (i), f bigettiva che manda rette in rette è una trasformazione affine se e solo se l'automorfismo $\phi(\lambda) = \lambda$ per ogni λ.

(ii) È immediato verificare che l'esistenza di una retta r tale che $f|r$ preserva il rapporto semplice forza $\phi = \mathrm{id}$. Il punto (b) segue.

(iii) Se $K = \mathbb{R}$, $\phi = \mathrm{id}$ è l'unico isomorfismo di campo. Il punto (c) segue.

Dimostriamo subito che l'identità è l'unico automorfismo del campo $\mathbb{R}$.

$\phi(1) = 1$, $\phi(n) = \phi(1) + \cdots + \phi(1) = n$,

$1 = \phi(n/n) = n\phi(1/n)$, $\phi(1/n) = 1/n$,

$\phi(m/n) = m/n$, cioè $\phi(q) = q$ per ogni $q \in \mathbb{Q}$.

Per ogni $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, $\phi(x^2) = \phi(x)^2 > 0$. Quindi, per ogni $x > 0$, $\phi(x) > 0$ e ϕ è strettamente crescente. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $\epsilon > 0$, esistono $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ tali che

$x - \epsilon < q_1 < x < q_2 < x + \epsilon$

$x - \epsilon < q_1 < \phi(x) < q_2 < x + \epsilon$

$|\phi(x) - x| < 2\epsilon$ per ogni $\epsilon > 0$

$\phi(x) = x$.

Dimostriamo (i). Sia $O \in A$ $O' = f(O)$. $P \in A \setminus \{O\}$. $P' = f(P)$.

f trasforma la retta $r(O, P)$ nella retta $r(O', P')$. Definiamo

$\phi_P : K \to K$

mediante

$f(O + t\vec{OP}) = O' + \phi_P(t)\vec{O'P'}$

Dimostriamo che $\phi := \phi_P$ non dipende dalla scelta di P.

Siano O, P, Q affinemente indipendenti, $Q' = f(Q)$. Per ogni $t \in K$, $t \neq 0$, siano

$P_t = O + t\vec{OP}$, $Q_t = O + t\vec{OQ}$,

$P'_t = f(P_t) = O' + \phi_P(t)\vec{O'P'}$,

$Q'_t = f(Q_t) = O' + \phi_Q(t)\vec{O'Q'}$

Le rette $r(P, Q)$ e $r(P_t, Q_t)$ sono parallele per ogni $t \neq 0$. Quindi lo sono le rette $r(P', Q')$ e $r(P'_t, Q'_t)$. Quindi

$\phi_P(t) = \phi_Q(t)$ per ogni $t \in K$

Mostriamo ora che

$$f(Q + t\vec{OP}) = Q' + \phi(t)\vec{O'P'}$$

Infatti $Q + t\vec{OP}$ è l'intersezione della retta passante per Q parallela a $r(O, P)$ e la retta passante per $O + t\vec{OP}$ parallela a $r(O, Q)$. La sua immagine è data dall'intersezione tra la retta passante per Q' parallela a $r(O', P')$ e la retta passante per $O' + \phi(t)\vec{O'P'}$ parallela a $r(O', Q')$. Questo implica l'affermazione (dettagliare per esercizio).

Segue che

$$f(O + t\vec{OP} + s\vec{OQ}) = O' + \phi(t)\vec{O'P'} + \phi(s)\vec{O'Q'}$$

quindi $f(P) = f(O) + a(\vec{OP})$, dove a ha le proprietà volute.

Resta da dimostrare che ϕ è un automorfismo del campo K. Per fare questo realizziamo geometricamente le operazioni somma e prodotto, usando 'Talete'.

Sia $t_3 = t_1 + t_2$. Con le stesse notazioni di prima, consideriamo le rette parallele a $r(O,Q)$ passanti per $P_i := O + t_i\vec{OP}$, $i = 1,2,3$. Queste intersecano la retta passante per Q parallela a $r(O,P)$ nei punti R_1, R_2, R_3. Le rette $r(O,R_1)$ e $r(P_2,R_3)$ sono parallele. Quindi

$$R_3 = O + t_2\vec{OP} + t_1\vec{OP} + \vec{OQ} = O + t_3\vec{OP} + \vec{OQ}$$

Consideriamo l'immagine tramite f di questa configurazione di rette. Ne ricaviamo

$$R'_3 = O + \phi(t_2)\vec{O'P'} + \phi(t_1)\vec{O'P'} + \vec{O'Q'} =$$

$$O + \phi(t_3)\vec{O'P'} + \vec{O'Q'}$$

da cui

$$(\phi(t_1) + \phi(t_2))\vec{O'P'} = \phi(t_3)\vec{O'P'},$$

$$\phi(t_3) = \phi(t_1) + \phi(t_2).$$

Poniamo ora $t_3 = t_1 t_2$. Con le notazione di prima, poniamo anche $Q_j = O + t_j \vec{OQ}$.

Le rette $r(P_1, Q)$ e $r(P_3, Q_2)$ sono parallele

(Talete: $t_1 : 1 = t_1 t_2 : t_2$).

Considerando l'immagine tramite f di questa configurazione di rette.

Le rette $r(P_1', Q')$ e $r(P_3', Q_2')$ sono parallele, da cui

$\phi(t_1) : \phi(1) = \phi(t_1 t_2) : \phi(t_2)$,

$\phi(t_3) = \phi(t_1)\phi(t_2)$