Alcune formule sulle dimensioni

$f : V \to W$ lineare, $\dim V = n$.

Allora $\dim \mathrm{Im}(f) \leq n$.

Vale la formula

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$$

Dim. Dimostreremo più della formula. Cioè costruiremo basi (con il numero "giusto" di elementi) dei vari spazi coinvolti.

Sia $D = \{z_1, \ldots, z_k\}$ una base di ker(f). Estendiamola ad una base $B = \{z_1, \ldots, z_k, v_1, \ldots v_s\}$ di V. Vogliamo dimostrare che

$E = \{f(v_1), \ldots, f(v_s)\}$ è una base di Im(f).

E genera: sia

$w = f(v) = f(\sum_j a_j z_j + \sum_h b_h v_h)$ nell'immagine di f.

Allora $w = \sum_h b_h f(v_h)$.

Indipendenza lineare di E :

$\sum_h a_h f(v_h) = 0$,

$f(\sum_h a_h v_h) = 0$,

$\sum_h a_h v_h \in \ker(f)$

$\sum_h a_h v_h = \sum_j c_j z_j$

$\sum_h a_h v_h + \sum_j (-c_j) z_j = 0$

quindi tutti i coefficienti, in particolare tutti gli a_h, sono nulli per l'indipendenza lineare della base B.

$\blacksquare$

Corollario. *Se* $\dim V = \dim W$, $f : V \to W$ *lineare è iniettiva se e solo se è surgettiva.*

Dim. $\dim V = \dim W = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$

Se f è iniettiva, $\dim \ker(f) = 0$, quindi

$\dim \mathrm{Im}(f) = \dim W$, $\mathrm{Im}(f) = W$.

Viceversa, se $\mathrm{Im}(f) = W$,

$\dim \ker(f) = 0$, $\ker(f) = \{0\}$,

f è iniettiva.

■

Formula di Grassmann

$\dim V = n$. W, U sottospazi di V. Vale la formula

$$\dim W + U = \dim W + \dim U - \dim W \cap U$$

Dim. Come prima, dimostreremo più della formula costruendo basi (con il numero "giusto" di elementi) degli spazi coinvolti.

Sia $D = \{z_1, \ldots, z_k\}$ una base di $W \cap U$.

Estendiamo D rispettivamente ad una base

$E = \{z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_r\}$ di W

ed una base $F = \{z_1, \ldots, z_k, u_1, \ldots, u_s\}$ di U.

Vogliamo dimostrare che

$G = \{z_1, \ldots, z_k, w_1, \ldots, w_r, u_1, \ldots, u_s\}$ è una base di $W + U$.

G genera: $w+u \in W+U$,

$$w+u = (\sum_j a_j z_j + \sum_h b_h w_h) + (\sum_j a'_j z_j + \sum_k d_k u_k)$$

$$w+u = \sum_j (a_j + a'_j) z_j + \sum_h b_h w_h + \sum_k d_k u_k.$$

Indipendenza lineare di G:

$\sum_j a_j z_j + \sum_h b_h w_h + \sum_k c_k u_k = 0$

$\sum_j a_j z_j + \sum_h b_h w_h = \sum_k (-c_k) u_k \in W \cap U$

$\sum_k (-c_k) u_k = \sum_j d_j z_j$

$\sum_j d_j z_j + \sum_k c_k u_k = 0$

quindi tutti i coefficienti, in particolare tutti i c_k sono nulli per l'indipendenza lineare di F. Allora

$\sum_j a_j z_j + \sum_h b_h w_h = 0$

infine tutti i coefficienti sono nulli per l' indipendenza lineare di E.

$\blacksquare$

Se la somma $W + U = W \oplus U$ è diretta, cioè $W \cap U = \{0\}$, allora

$\dim W + U = \dim W + \dim U$

unendo una base di W e una base di U si ottiene una base di $W \oplus U$.

$\dim V = n$, W un sottospazio. V/W lo spazio quoziente, $\pi : V \to V/W$ la proiezione che è (tautologicamente) lineare.

Ogni W ammette spazi complementari U in V, cioè tali che $V = W \oplus U$. Basta estendere una base D di W ad una base $\{D, E\}$ di V e prendere $U = \mathrm{span}(E)$. Vale

La restrizione $\pi|U : U \to V/W$ è un isomorfismo. Ne segue che $\dim V/W = \dim V - \dim W$.

Dim. $\pi|U$ è surgettiva: sicuramente π lo è; $z = \pi(v) \in V/W$;

$v = w+u$, $\pi(v) = \pi(w)+\pi(u) = \pi(u) = \pi|U(u)$.

$\pi|U$ è iniettiva: $\ker \pi = W$,

$\ker(\pi|U) = \ker \pi \cap U = \{0\}$.

$\blacksquare$

Isomorfismo canonico tra complementari di W.

$V = W \oplus U = W \oplus U'$.

$\phi : U \to U', \phi := (\pi|U')^{-1} \circ \pi|U$

è l' *isomorfismo canonico* tra i due complementari.

Esplicitandolo, $u \in U$,

$u = w + u' \in W \oplus U$ in modo unico,

$\phi(u) = u'$.

In altre parole, se $p_{U'} : W \oplus U' \to U'$ è la proiezione su U' portata dalla somma diretta, allora $\phi(u) = p_{U'}(u)$.

$\dim V \times W = \dim V + \dim W$

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base di V e $\{w_1, \ldots, w_k\}$ è una base di W, allora

$\{v_1, 0), \ldots, (v_n, 0), (0, w_1), \ldots, (0, w_k)\}$ è una base di $V \times W$.

Verificarlo per esercizio.

La formula di Grassmann è una conseguenza della prima formula sulle dimensioni di nucleo e immagine.

Dim. Consideriamo

$f : W \times U \to W + U, f(w, u) = w + u$

che è lineare e surgettiva, per cui $\dim \mathrm{Im}(f) = \dim(W + U)$.

$\ker(f) = \{(w, u); w + u = 0\}$, $w = -u \in W \cap U$, quindi

$\ker(f) = \{(z, -z); z \in W \cap U\}$;

$\phi : W \cap U \to \ker(f), \phi(z) = (z, -z)$ è un isomorfismo; $\dim \ker(f) = \dim W \cap U$

Usando la prima formula sulle dimensioni

$\dim W \times U = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f)$

$\dim W + \dim U = \dim W \cap U + \dim(W + U)$

$\blacksquare$

La formula sulle dimensioni di nucleo e immagine è una conseguenza della formula di Grassmann.

Dim. Sia $f : V \to W$ lineare. Consideriamo

$V \times \mathrm{Im}(f)$.

Consideriamo il grafico

$G(f) = \{(v, w) \in V \times \mathrm{Im}(f); w = f(v)\}$

che è canonicamente isomorfo a V.

Affermiamo che

$V \times \mathrm{Im}(f) = (V \times \{0\}) + G(f)$.

Infatti, per ogni $v, v' \in V$,

$(v, f(v')) = (v - v', 0) + (v', f(v'))$.

$$(V \times \{0\}) \cap G(f) = \{(v, f(v)); f(v) = 0\},$$

quindi è isomorfo a $\ker(f)$.

Applicando la formula di Grassmann

$$\dim V + \dim \mathrm{Im}(f) = \dim V + \dim V - \dim \ker(f)$$

quindi

$$\dim V = \dim \ker(f) + \dim \mathrm{Im}(f).$$

$\blacksquare$