

FIBRATI

- La costruzione del fibrato tangente si presta ad un'ampia generalizzazione.

Un *gruppo di Lie* $(G, *)$ è per definizione una varietà liscia G munita di un'operazione di gruppo $*$: $G \times G \rightarrow G$ che è liscia e tale che anche l'applicazione $G \rightarrow G, g \rightarrow g^{-1}$ è liscia. $GL(n)$ e gli altri familiari gruppi di matrici sono esempi tipici di gruppi di Lie. Un gruppo finito o numerabile munito della topologia discreta è un gruppo di Lie.

Data una varietà liscia F , indichiamo con $\text{Aut}(F)$ il gruppo degli automorfismi lisci di F , dove l'operazione è data dalla composizione. Supponiamo che un gruppo di Lie G sia realizzato come sottogruppo di $\text{Aut}(F)$. Allora G *agisce (a destra)* su F mediante l'azione

$$G \times F \rightarrow F, (g, f) \rightarrow g(f) .$$

- Ad esempio se $F = \mathbb{R}^n$, l'inclusione di $GL(n)$ in $\text{Aut}(\mathbb{R}^n)$ determina l'usuale azione di $GL(n)$ su \mathbb{R}^n via trasformazioni lineari.
- Un gruppo di Lie G si realizza come sottogruppo di $\text{Aut}(G)$ associando ad ogni $g \in G$ la trasformazione $R_g : G \rightarrow G, R_g(h) = gh$ per ogni $h \in G$. L'azione associata di G su G stesso è detta per "moltiplicazione a destra".

Sia M una n -varietà liscia con atlante massimale $\{U_j, \phi_j\}_{j \in J}$. Un *cociclo liscio definito sul ricoprimento aperto* $\{U_j\}$ di M a valori nel gruppo di Lie G è una famiglia di applicazioni

$$\mathbf{c} = \{\mu_{j,i} : U_i \cap U_j \rightarrow G\}_{(i,j)} \in J^2$$

tale che

- (1) Per ogni $(i, j) \in J^2$, $\mu_{j,i}$ è liscia;
- (2) Per ogni $i \in J$, per ogni $x \in U_i$, $\mu_{i,i}(x) = I$;
- (3) Per ogni $(i, j) \in J^2$, per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\mu_{j,i}(x) = \mu_{i,j}(x)^{-1} \in GL(n)$;
- (4) Per ogni $(i, j, k) \in J^3$, per ogni $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$, $\mu_{i,k}(x)\mu_{k,j}(x)\mu_{j,i}(x) = I$.

Supponiamo che $G \subset \text{Aut}(F)$ come sopra, con l'associata azione di G su F .

- Ricordiamo che nel caso del fibrato tangente, $G = GL(n)$, $F = \mathbb{R}^n$, l'azione è quella via trasformazioni lineari. Il cociclo è ottenuto usando le applicazioni tangenti dei cambiamenti di carta su M .

Siano $M, F, G \subset \text{Aut}(F)$, \mathbf{c} cociclo a valori in G come sopra. Ripetendo parola per parola la costruzione di $(T(M), \pi_M)$, (sostituendo \mathbb{R}^n con F , $GL(n)$ con G) otteniamo un fibrato

$$\pi : E \rightarrow M$$

con *gruppo strutturale* G e *fibra* F . Avremo così banalizzazioni locali isomorfe a $U_j \times F \rightarrow U_j$ (per cui la varietà E (lo "spazio totale" del fibrato) è "localmente un prodotto" con fibra F) e un atlante fibrato in cui i cambiamenti di carta mandano fibre in fibre mediante diffeomorfismi del tipo $f \rightarrow \mu_{j,i}(x)(f)$.

- Se $G = GL(m)$ e $F = \mathbb{R}^m$ con l'usuale azione via trasformazioni lineari (m non è necessariamente uguale a $\dim M$) diciamo che $\pi : E \rightarrow M$ è un *fibrato vettoriale (reale) di rango m* . Se invece di $GL(m) = GL(m, \mathbb{R})$ usiamo $GL(m, \mathbb{C})$ abbiamo la nozione di fibrato vettoriale complesso (con fibra \mathbb{C}^m).

- Se $G = F$ con l'azione data dalla moltiplicazione a destra, allora diciamo che $E \rightarrow M$ è un *fibrato principale di gruppo strutturale G* . Se un fibrato principale è determinato dal cociclo $\mathbf{c} = \{\mu_{j,i}\}$, ρ è come sopra, il fibrato con fibra F ottenuto per mezzo di \mathbf{c} e ρ si dice *associato* a quel fibrato principale.

- **(Fibrati tensoriali su M).** Ricordiamo alcuni fatti di *algebra multi-lineare*. Sia V uno spazio vettoriale (su \mathbb{R} , ma quanto segue vale su un campo di scalari arbitrario) di dimensione finita n . Indichiamo con $V^* = \text{Hom}(V, \mathbb{R})$ lo *spazio duale*. Abbiamo che $\dim V^* = \dim V$, infatti per ogni base $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ di V è determinata la *base duale* $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ di V^* definita dalla proprietà

che $v^j(v_i) = \delta_i^j$. Quindi ogni base \mathcal{B} di V determina l'isomorfismo (non canonico) $\phi_{\mathcal{B}} : V \rightarrow V^*$ tale che $\phi_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = \mathcal{B}^*$. D'altra parte, lo spazio *biduale* $(V^*)^* = \text{Hom}(V^*, \mathbb{R})$ è isomorfo a V mediante l'*isomorfismo canonico* $\phi : V \rightarrow (V^*)^*$ definito da $\phi(v)(\psi) = \psi(v)$, per ogni $v \in V$, per ogni $\psi \in V^*$. Si verifica direttamente che per ogni base \mathcal{B} di V , $\phi = \phi_{\mathcal{B}^*} \circ \phi_{\mathcal{B}}$. Commetteremo l'abuso di considerare $V = (V^*)^*$ intendendo con questo che sono canonicamente identificati tramite ϕ .

Per ogni $k \in \mathbb{N}$, poniamo (usando varie notazioni equivalenti usate in letteratura)

$$T_0^0(V) = \mathbb{R}$$

$$T_0^k(V) = V^{\otimes k} := \text{Mult}((V^*)^k, \mathbb{R})$$

dove l'ultimo termine indica lo spazio vettoriale delle applicazioni *multilineari* definite sul prodotto di k copie di V^* a valori in \mathbb{R} . Analogamente poniamo

$$T_k^0(V) = (V^*)^{\otimes k} = \text{Mult}(V^k, \mathbb{R})$$

e in generale, per ogni $(k, h) \in \mathbb{N}^2$, poniamo

$$T_h^k(V) = V^{\otimes k} \otimes (V^*)^{\otimes h} = \text{Mult}((V^*)^k \times V^h, \mathbb{R}).$$

In questo modo abbiamo associato ad ogni V una famiglia infinita di spazi vettoriali $\{T_h^k(V)\}$. Un elemento $t \in T_h^k(V)$ è detto un *tensore di tipo* (k, h) su V .

- $T_1^0(V) = V^*$, $T_0^1(V) = (V^*)^* = V$. Quindi i vettori di V e i funzionali lineari su V sono particolari tensori. Un prodotto scalare su V è un tensore $t \in T_2^0(V)$ simmetrico. $T_1^1(V) = \text{Bil}(V^* \times V, \mathbb{R})$ è isomorfo a $\text{End}(V)$ mediante l'isomorfismo *canonico* che associa ad ogni endomorfismo f di V , l'applicazione bilineare ϕ_f tale che $\phi_f(\psi, v) = \psi(f(v))$.

(Le basi \mathcal{B}_h^k) Abbiamo visto che ogni base \mathcal{B} di V determina in modo canonico la base duale $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_1^0$ di V^* . Vogliamo mostrare che questo si generalizza per ogni $(k, h) \in \mathbb{N}^2$, nel senso che a partire da \mathcal{B} determiniamo una base privilegiata \mathcal{B}_h^k di $T_h^k(V)$. Cominciamo con $T_2^0(V) = \text{Bil}(V \times V, \mathbb{R})$. E' definita in modo canonico l'applicazione *bilineare*

$$\Phi : V^* \times V^* \rightarrow T_2^0(V)$$

tale che per ogni $(\phi, \psi) \in V^* \times V^*$, per ogni $(v, w) \in V \times V$, $\Phi(\phi, \psi)(v, w) = \phi(v)\psi(w)$. Introduciamo la notazione $\Phi(\phi, \psi) = \phi \otimes \psi$. Gli elementi del tipo $\phi \otimes \psi$ sono detti i tensori *decomponibili* di $T_2^0(V)$. Si verifica allora che l'applicazione Φ verifica le seguenti proprietà

- (1) Se $\mathcal{B}^* = \{v^1, \dots, v^n\}$ allora $\mathcal{B}_2^0 = \{v^i \otimes v^j\}_{i,j=1,\dots,n}$ (ordinati in modo lessicografico) è una base di $T_2^0(V)$ che quindi ha dimensione uguale a n^2 .
- (2) (*Proprietà universale*) Per ogni applicazione *bilineare* $g : V^* \times V^* \rightarrow Z$ a valori in qualche \mathbb{R} -spazio Z , esiste un'unica applicazione *lineare* $G : T_2^0(V) \rightarrow Z$ tale che $g = G \circ \Phi$. Infatti G è univocamente individuata dalle identità $G(v^i \otimes v^j) = g(v^i, v^j)$.

Lo stesso argomento (usando " $V = (V^*)^*$ ") si può ripetere per $T_0^2(V) = \text{Bil}(V^* \times V^*, \mathbb{R})$, ottenendo la base $\mathcal{B}_0^2 = \{v_i \otimes v_j\}$. In generale, con lo stesso procedimento, otteniamo la base

$$\mathcal{B}_h^k = \{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h}\}$$

di $T_h^k(V)$. Ogni $t \in T_h^k(V)$ si può scrivere in modo unico come combinazione lineare

$$t = t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes v^{j_1} \otimes \dots \otimes v^{j_h}$$

dove abbiamo adottato la *convenzione di Einstein* per cui sommiamo su tutte le coppie di indici ripetuti una volta in alto e una in basso; gli scalari con multi-indici t_J^I sono le coordinate di t rispetto alla base \mathcal{B}_h^k .

(*Cambiamenti di coordinate*) Siano $\mathcal{B} = \{v_i\}$ e $\mathcal{D} = \{w_i\}$ due basi di V . Allora il cambiamento di coordinate passando da una base all'altra è determinato dalla matrice $A = (a_i^h) \in GL(n)$ tale che

$$v_i = a_i^h w_h$$

(si noti che h è l'indice di riga, i è l'indice di colonna). Vogliamo determinare, in funzione di A , i cambiamenti di coordinate rispetto alle basi \mathcal{B}_h^k e \mathcal{D}_h^k di $T_h^k(V)$. Per $V^* = T_1^0$ ricaviamo che

$$v^r = b_s^r w^s$$

dove $B = (b_s^r) = (A^t)^{-1}$. In generale l'espressione delle coordinate τ_R^S di un tensore $t \in T_h^k(V)$ rispetto alla base \mathcal{D}_h^k in funzione delle coordinate t_J^I di t rispetto a \mathcal{B}_h^k sono della forma

$$\tau_{r_1 \dots r_h}^{s_1 \dots s_k} = a_{i_1}^{s_1} \dots a_{i_k}^{s_k} b_{r_1}^{j_1} \dots b_{r_h}^{j_h} t_{j_1 \dots j_h}^{i_1 \dots i_k} .$$

Le formule di cambiamento di base viste sopra definiscono degli omomorfismo (detti anche “rappresentazioni”) lisci tra gruppi di Lie

$$\rho_h^k : GL(n) \rightarrow GL(T_h^k(\mathbb{R}^n)) .$$

In particolare $\rho_1^0(A) = (A^t)^{-1}$ per ogni $A \in GL(n)$.

Per ogni varietà M , partendo dal cociclo $\mathbf{c} = \{\mu_{j,i}\}$ a valori in $GL(n)$ che definisce $T(M)$, abbiamo i cocicli $\mathbf{c}+_h = \{\rho_h^k \circ \mu_{j,i}\}$, usando i quali costruiamo la famiglia di fibrati vettoriali detti *fibrati tensoriali su M*

$$(\pi_h^k)_M : T_h^k(M) \rightarrow M$$

con gruppo strutturale $G = GL(T_h^k(\mathbb{R}^n))$ con fibra $F = T_h^k(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $x \in M$, $(\pi_h^k)_M^{-1}(x) = T_h^k(T_x M)$. Il fibrato tangente $T(M) = T_0^1(M)$. $T_1^0(M)$ è detto il *fibrato cotangente* di M .

(Il fibrato delle basi $BT(M)$) Usando il solito cociclo che definisce $T(M)$, possiamo considerare il corrispondente fibrato principale

$$\beta_M : B(M) \rightarrow M$$

di gruppo strutturale $G = GL(n)$. Interpretando le colonne di una matrice di $GL(n)$ come una base di \mathbb{R}^n , per ogni $x \in M$, la fibra $\beta_M^{-1}(x)$ può essere interpretata come l'insieme delle basi dello spazio tangente $T_x M$.

• **(Il fibrato determinante)** Considerato ancora il cociclo che definisce $T(M)$, segue dalle proprietà del determinante che $\{\det \mu_{j,i}\}$ è un cociclo a valori nel gruppo moltiplicativo $G = GL(1)$. Possiamo allora costruire il fibrato vettoriale di rango 1 detto il *fibrato determinante di M*

$$\det T(M) \rightarrow M .$$

Prendendo il *segno* del determinante, otteniamo un cociclo a valori nel gruppo moltiplicativo finito $G = \{\pm 1\}$. Il fibrato principale associato

$$r : \tilde{M} \rightarrow M$$

è tale che \tilde{M} è una varietà della stessa dimensione di M , r è localmente un diffeomorfismo e per ogni $x \in M$, la fibra $r^{-1}(x)$ è fatta di due punti. La proiezione $r : S^n \rightarrow \mathbf{P}^n$ si può ottenere per questa via.

• **(Fibrati isomorfi)** Siano $\pi : E \rightarrow M$ e $\pi' : E' \rightarrow M'$ fibrati con lo stesso gruppo strutturale G e stessa fibra F . Essi si dicono isomorfi se esistono diffeomorfismi $\tilde{\phi} : E \rightarrow E'$, $\phi : M \rightarrow M'$, tali che $\pi' \circ \tilde{\phi} = \phi \circ \pi$, quindi per ogni $x \in M$, $\tilde{\phi}$ manda la fibra $F_x = \pi^{-1}(x)$ in fibra $F'_{\phi(x)} = (\pi')^{-1}(\phi(x))$; inoltre richiediamo che le rappresentazioni locali di $\tilde{\phi}$ siano della forma $U \times F \rightarrow U' \times F$, $(x, f) \rightarrow (\phi(x), g(x)f)$, dove $g : U \rightarrow G$ è liscia.

- Se $f : M \rightarrow M'$ è un diffeomorfismo, allora (Df, f) è un isomorfismo tra $T(M)$ e $T(M')$.

Se $M = M'$ si considera anche una versione più ristretta della nozione di isomorfismo tra fibrati, imponendo che $\phi = \text{id}$. Questa relazione si può riformulare in termini di cocicli: due fibrati su M costruiti a partire da due cocicli \mathbf{c} e \mathbf{c}' sull'atlante massimale di M a valori in G , sono isomorfi (in questo senso ristretto) se e solo se esiste una famiglia di applicazioni lisce $\{\lambda_j : U_j \rightarrow G\}$, tale che per ogni $(i, j) \in J^2$, per ogni $x \in U_i \cap U_j$, $\mu'_{j,i}(x) = \lambda_j^{-1}(x) \mu_{j,i}(x) \lambda_i(x)$.