Ing. Biomedica - 2016-17

Analisi I CORSO A
4 Febbraio 2017

Testo X

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di* $0 \le x \le 10$ *punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che* $x \ge 6$. *In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di* $0 \le y \le 24$ *punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se* $x + y \ge 18$. *In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà* $v = \min(28, x + y)$.

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0 (punti 0). Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (3 punti) Dire se esiste e in caso positivo calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{|\sin x|}{\log(1+2x)}$$

SOLUZIONE.

$\boxed{X}$ Il limite L non esiste ☐Il limite L esiste e vale

Che il limite non esista si può vedere mostrando che il limite destro e sinistro sono diversi e questo può esser provato in molti modi. Ad esempio

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}\frac{x}{\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\frac{1}{x}\log(1+2x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\log(1+2x)^{\frac{1}{x}}}$$

Quest'ultimo si calcola (cfr DISPENSE sui limiti) osservando che $\lim_{x\to 0^+}(1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{2}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{2}{y}\right)^{y} = e^2$ e quindi $\lim_{x\to 0^+} \frac{|\sin x|}{\log(1+2x)} = \frac{1}{2}$.

In modo del tutto analogo, ricordando che per $x < 0$ $|\sin x| = -\sin x$, si ottiene che $\lim_{x\to 0^-} \frac{|\sin x|}{\log(1+2x)} = -\frac{1}{2}$, da cui la conclusione.

Esercizio 2. (3,5 punti) Si indichi con $S(n)$ la somma dei cubi dei primi n numeri naturali, cioè

$$S(n) = \sum_{k=1}^{n} k^3$$

Provare per induzione che $S(n) = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
SOLUZIONE.
La formula è vera per $n = 1$. Infatti $1^3 = \dfrac{1^2(1+1)^2}{4} = S(1)$.
Dimostriamo che $p(n) \Rightarrow p(n+1)$

$S(n+1) = \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = S(n) + (n+1)^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 = (n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4} + (n+1)\right) = \dfrac{(n+1)^2((n+2)^2}{4} = \dfrac{(n+1)^2((n+1)+1)^2}{4}$

Esercizio 3. (3,5 punti) Si consideri la funzione continua $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$f(x) = \frac{\sin(x)\cos(x)}{1 + \sin(x)^2} .$$

Siano F_1 e F_2 le seguenti funzioni integrali di f:

$$F_1 = \int_0^x f(t)dt, \quad F_2 = \int_{\pi/2}^x f(t)dt .$$

Determinare la funzione differenza $F_1 - F_2$.
SOLUZIONE
Come visto nelle relative DISPENSE, $F_1 - F_2 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)dt$ e questo integrale si calcola immediatamente osservando che $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f(t)dt = \left|\frac{1}{2}\log(1+\sin(x)^2)\right|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}(\log 2 - \log 1) = \frac{1}{2}\log 2$.

3. Seconda parte

Esercizio 1. (10 punti) Si considerino le due funzioni definite su tutto $\mathbf{R}$ mediante le formule $f(x) = \dfrac{x+|x|}{2}$ e $g(x) = x^3$ rispettivamente. e si indichi con $h = f \circ g$

(1) Dire se la funzione h è iniettiva
(2) Dire se la funzione h è surgettiva
(3) Determinare il più grande sottoinsieme C di $\mathbf{R}$ tale che la funzione h sia continua su C.
(4) Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbf{R}$ tale che la funzione h sia derivabile su D.
(5) Determinare i punti di massimo e minimo assoluti di h.
(6) Determinare i punti di massimo e minimo locali di h.
(7) Determinare gli eventuali asintoti del grafico di h.

SOLUZIONE.
La funzione $h = f \circ g$ operando la composizione può essere descritta come

$$h(x) = \frac{x^3 + |x|^3}{2} = \begin{cases} x^3 & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(Un altro modo di arrivare a questa descrizione era di osservare che $f = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.)

(1) La funzione h non è iniettiva perché per ogni $x < 0$ $h(x) = 0$
(2) La funzione h non è surgettiva perché non assume mai valori negativi.
(3) $C = \mathbf{R}$. La funzione h risulta continua in tutto $\mathbf{R}$ perché fuori dell'origine è composizione di funzioni elementari e in 0 risulta che $\lim_{x\to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^-} h(x) = h(0) = 0$.
(4) $D = \mathbf{R}$. Fuori dallo 0 la cosa è evidente. In 0, il limite del rapporto incrementale della funzione h esiste e vale 0.
(5) Punti di massimo e minimo assoluti di h:
   -) massimi assoluti non ve ne sono in quanto $\lim_{x\to +\infty} h(x) = +\infty$
   -) tutti i punti dell'insieme $x \leq 0$ sono punti di minimo assoluto (la funzione vale zero in ognuno di essi e non assume mai valori negativi in tutto il dominio).
(6) Punti di massimo e minimo locali di h:
   -) tutti i punti dell'insieme aperto $M = \{x < 0\}$ sono punti di massimo locale poiché essendo la funzione in tale insieme costante, ogni punto $\overline{x} \in M$ ha un intorno U ove $h(x) \leq h(\overline{x})$;
   -) tutti i punti dell'insieme $\overline{M} = M \cup \{0\}$ sono punti di minimo locale perché per ogni punto $\overline{x} \in \overline{M}$ esiste un intorno risulta $h(x) \geq h(\overline{x})$.
(7) L'asse delle x risulta un asintoto orizzontale (per $x \to -\infty$). Non vi sono altri asintoti.

Esercizio 2 (4 punti)
Sia h un numero naturale. Dire per quali valori di h esiste il seguente limite

$$\lim_{n\to+\infty}(h+(-1)^n)n$$

e nel caso calcolarlo.
SOLUZIONE.
Esplicitando il termine n-esimo della successione abbiamo

$$a_n = \begin{cases} (h-1)n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ (h+1)n & \text{se } n \text{è pari} \end{cases}$$

Pertanto si ha che $a_n \geq (h-1)n$ per ogni n e quindi se $h \neq 0, 1$, per il teorema del confronto la successione diverge.
Se $h = 0$ il termine generico a_n della successione è $(-1)^n n$ mentre se $h = 1$ tutti i termini di indice dispari a_{2n+1} sono nulli, e quindi in entrambi i casi la successione non converge.

Esercizio 3. (5 punti)
Sia n un intero positivo e $X_n = \{z \in \mathbf{C} | z^n = 1\}$ Dimostrare che per ogni $n \geq 5$ esiste almeno un elemento di X_n nel terzo quadrante aperto, cioè nell'insieme $Z = \{z = x + iy | x < 0, y < 0\}$.
SOLUZIONE
Se nessun elemento di X_n cadesse nel III quadrante la distanza angolare tra due elementi consecutivi sarebbe maggiore di $\frac{\pi}{2}$.
Ricordando che, fissato n, le n radici n-esime dell'unità sono $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ per $k = 0, 1, \ldots, n$ lo scarto angolare tra due radici n-esime consecutive è $\frac{2\pi}{n}$ radianti e per $n \geq 5$ risulta $\frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{2}$.
Si osservi en passant che per $n = 2, 4$ nessuna radice n-esima cade nel III quadrante aperto mentre per $n = 3$ ve ne è una.

Esercizio 4. (5 punti)
Si consideri la funzione positiva $f : [5, +\infty) \to \mathbf{R}$ definita dalla formula

$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}\ .$$

Per ogni $a \in [5, +\infty)$, consideriamo il trapezoide $T(f)$ con i lati paralleli all'asse delle Y, racchiuso tra il segmento $[a, a + 1]$ contenuto nell'asse delle ascisse e il grafico della restrizione della funzione su questo intervallo. Provare che l'area di questo trapeziode decresce e tende a 0 per a che tende a $+\infty$.
SOLUZIONE.
L'area del trapezoide $T(f)$ è espressa

$$m(T(f)) = \int_a^{a+1} \frac{4}{x^2-4}dx = \left|\log\frac{x-2}{x+2}\right|_a^{a+1} = \log\frac{a-1}{a+3} - \log\frac{a-2}{a+2} = \log\frac{(a-1)(a+2)}{(a+3)(a-2)}$$

Da questa espressione risulta evidente che $\lim_{a\to\infty} m(T) = 0$ e che essendo per $a \geq 5$

$$\frac{d}{da}m(T(f)) = \frac{-4}{(a-1)(a+2)(a+3)(a-2)} < 0$$

l'area del trapezoide è, per $a \geq 5$, una funzione decrescente di a.