Ing. Biomedica - 2016-17

Analisi I CORSO A
25 Febbraio 2017

Compito Y

COGNOME .... **NOME** ....

MATRICOLA .... **VALUTAZIONE** .... + ... = ...

1. Istruzioni

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; **solo questo sarà ritirato e valutato.** *I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \le x \le 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \ge 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \le y \le 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \ge 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.*

Attenzione. Tutte le risposte devono essere giustificate.

2. Prima parte

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3)
Determinare il minimo $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \ge n_0$, sia vera la disuguaglianza

$$8^n \ge 3^n + 6^n$$

.
SOLUZIONE
Indichiamo con $d(n)$ la diseguaglianza. La diseguaglianza non è vera per $n = 0, 1$ mentre è vera per $n = 2$ in quanto $64 \ge 9 + 36$. Essendo la diseguaglianza induttiva, cioè $d(n) \Rightarrow d(n+1)$ la diseguaglianza è vera per ogni $n \ge 2$. Per provare l'induttività si osservi che

$$8^{n+1} = 8^n \cdot 8 \ge (3^n + 6^n)8 = 3^n \cdot 8 + 6^n \cdot 8 \ge 3^n \cdot 3 + 6^n \cdot 6 \ge 3^{n+1} + 6^{n+1}$$

.

Esercizio 2. (punti 4) Dire se esiste e nel caso calcolare il seguente limite

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2}$$

SOLUZIONE

$\square$ NO il limite non esite $\boxed{\text{X}}$ SI il limite esiste e vale e.

Con le usuali manipolazioni algebriche otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+2}{x^2+1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x^2+1}\right)^{(x^2+1)-1} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}}{\left(1+\frac{1}{y}\right)} = e$$

Esercizio 3. (punti 3)

Calcolare il seguente integrale definito

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^2\cos(x)dx$$

SOLUZIONE

Con reiterate integrazioni per parti otteniamo

$$\int x^2\cos(x)dx = x^2\sin x - 2\int x\sin x dx = x^2\sin x - 2(x\cos x + \int \cos x dx) =$$
$$= (x^2-2)\sin x + 2x\cos x + c$$

Per cui

$$\int_{\pi}^{2\pi} x^2\sin(x)dx = \left|(x^2-2)\sin x + 2x\cos x\right|_{\pi}^{2\pi} = 6\pi$$

3. Seconda parte

Esercizio 1. (punti 8) (1) Si consideri la formula

$$f(x) = x \log \left| \frac{x+3}{2-x} \right|$$

(1) Determinare il più grande sottoinsieme X di $\mathbf{R}$ tale che la formula definisca una funzione $f : X -> \mathbf{R}$.
(2) Determinare il più grande sottoinsieme C di X tale che f sia continua su C.
(3) Determinare il più grande sottoinsieme D di C tale che f sia derivabile su D.
(4) Determinare, se ne esistono, i punti di minimo e massimo assoluti di f.
(5) Determinare gli asintoti del grafico di f.

SOLUZIONE

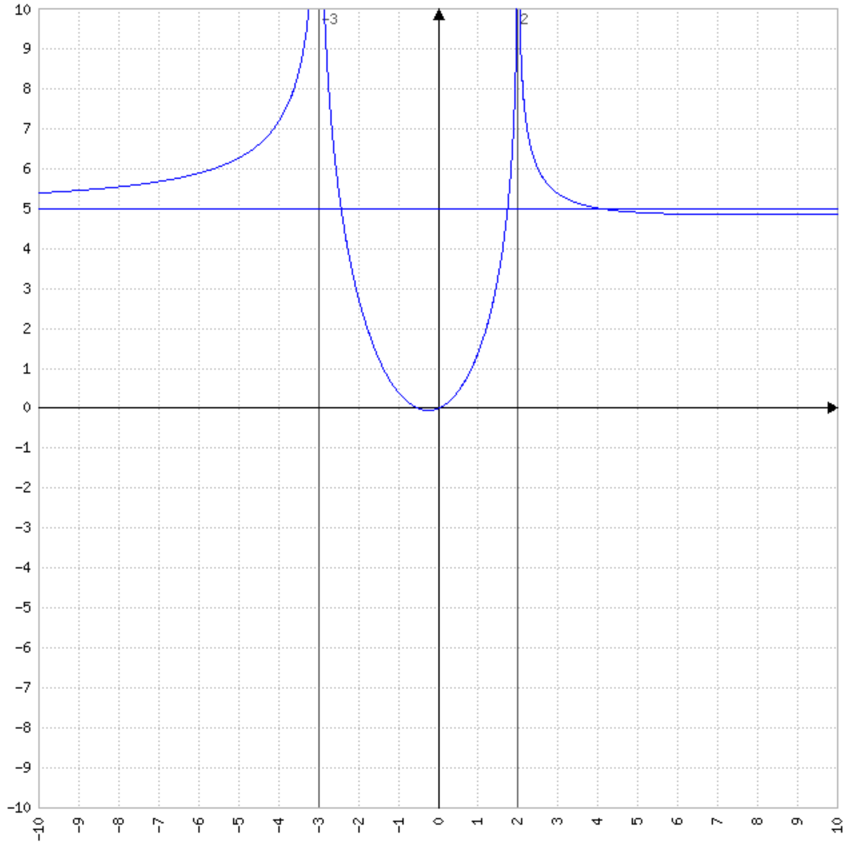
(1) $X = \mathbf{R} \setminus \{-3, 2\}$
(2) $C = X$
(3) $D = X$
(4) Vi è almeno un punto di minimo assoluto nell'intervallo $[-\frac{1}{2}, 0]$, mentre non vi sono massimi assoluti.

Osserviamo che massimi assoluti non esistono in quanto $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to -3} f(x) = +\infty$.

Per i minimi si può osservare che la funzione al di fuori dell'intervallo $[-\frac{1}{2}, 0]$ è strettamente positiva mentre all'interno di tale intervallo è strettamente negativa. Quindi, essendo tale intervallo compatto, la funzione in tale intervallo ha un minimo che quindi risulta essere il minimo assoluto della funzione. .

(5) Gli asintoti del grafico di f sono le rette $x = -3$ e $x = 2$ e la retta $y = 5$ poiché risulta $\lim_{x \to +\infty} x \log \left| \frac{x+3}{2-x} \right| = \lim_{x \to +\infty} \log \left| \frac{x+3}{2-x} \right|^x = \lim_{x \to +\infty} \log \left(\frac{x+3}{x-2} \right)^x = \lim_{x \to +\infty} \log \left(1 + \frac{5}{x-2} \right)^{x-2+2} = 5$ e analogamente per $x \to -\infty$

Al fine di rendere più chiara la situazione visualizziamo il grafico della funzione f.



Esercizio 2. (punti 6) Sia $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una funzione e $x_0 \in \mathbf{R}$. Esplicitare completamente (con tutti gli ϵ, δ e quantificatori che servono) il fatto che f non sia derivabile in x_0.

SOLUZIONE

La funzione f non è derivabile nel punto x_0 se per x tendente a x_0 il limite del rapporto incrementale $RI(x_0, h)$ della funzione o non esiste o esiste ma non è finito.

Quindi dobbiamo esprimere il fatto che ogni numero reale $r \in \mathbf{R}$ non è limite per x tendente a x_0 del rapporto incrementale, cioè che per ogni numero reale esiste un intorno $V_\varepsilon = \{y||y-r| < \varepsilon\}$ per cui non esiste un intorno $U_\delta = \{x||x-x_0| < \delta\}$ di x_0 tale che $RI(U_\delta) \subset V_\epsilon$, cioè $\forall \delta$ esista in U_δ almeno un punto x tale che $RI(x) \notin V_\epsilon$. Quindi

$$\forall r \in \mathbf{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x |x - x_0| < \delta \quad \text{e } |RI(x) - r| \geq \varepsilon$$

Esercizio 3. (punti 6) Si determinino tutte le soluzioni complesse dellequazione

$$z^2 = -4\bar{z}$$

SOLUZIONE

Ponendo $z = a + ib$ l'equazione diventa

$$a^2 - b^2 + 2abi + 4(a - ib) = a^2 - b^2 + 4a + 2ib(a - 2) = 0$$

da cui otteniamo

$$\begin{cases} a^2 - b^2 + 4a & = 0 \\ b(a-2) = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione ci dice che o $b = 0$, nel qual caso la prima equazione implica o $a = 0$ oppure $a = -4$ mentre se $a = 2$ la prima equazione implica $b = \pm 2\sqrt{3}$. Pertanto le soluzioni dell'equazione sono $0, -4, 2 + 2i\sqrt{3}, 2 - 2i\sqrt{3}$.

Esercizio 4. (punti 4) Determinare lintegrale generale dellequazione differenziale

$$(t-1)y' = -4y$$

Determinare se esiste una soluzione tale che $y(0) = 1$.
SOLUZIONE La funzione $y = 0$ è soluzione dell'equazione. Supponiamo $y \neq 0$: l'equazione, a variabili separabili, risulta equivalente in $t \neq 1$ a $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{-4dt}{t-1}$.
Passando alle funzioni integrali abbiamo $\ln |y| = -4 \ln |t-1| + c$ da cui, eliminando i moduli tenendo conto della costante arbitraria c, otteniamo, per $t \neq 1$.

$$y = \frac{k}{(t-1)^4}$$

Prendendo $k = 1$ si ha una soluzione tale che $y(0) = 1$.