December 14, 2018

ERRATA/INTEGRAZIONI 18-19

In questa scheda segnaliamo le eventuali correzioni o integrazioni da apportare alle dispense mano a mano che esse saranno usate e rilette durante lo svolgimento del corso. Questa scheda è quindi 'in progress', si consiglia di consultarla di tanto in tanto.

(1) Nella dispensa [INDUZIONE], la formula corretta nell' Esempio 4 a pag. 2 è:

$$f(n) = \sum_{i=0}^{n} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots a^n$$

(2) La terminologia adottata alla fine di pag. 3 della dispensa [SUCCESSIONI] è leggermente diversa da quella adottata a lezione dove una successione regolare è stata definita *convergente* se il suo limite $L \in \mathbb{R}$, *divergente* se $L \in \{\pm\infty\}$.

(3) Nella dispensa [SUCCESSIONI], verso la fine di pag. 3, il risultato sul limite delle sottosuccessioni di una successione regolare a_n continua a valere richiedendo solo che $\lim_{n\to+\infty} j_n = +\infty$ senza bisogno che j sia di più crescente. Infatti poiché a_n sta definitivamente in qualsiasi intorno U del limite L e per ogni $\bar{n} \geq n_0$, definitivamente $j_n > \bar{n}$, allora a_{j_n} sta definitivamente in U.

(4) Nella dispensa [SUCCESSIONI] a pag. 6, nella prima formula sul numero di Nepero c'è un segno sbagliato, la formula corretta è:

$$a_n = \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} \frac{1}{n^h} = \sum_{h=0}^{n} \frac{1}{h!} \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-h+1)}{n^h}$$

(5) Nella dispensa [SUCCESSIONI], a pag. 9 si mostra che se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *a termini positivi* è convergente, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Questo fatto è vero e resta vero (con la stessa dimostrazione) anche se la serie è convergente ma non necessariamente a termini positivi. D'altra parte, come mostra l' esempio della serie armonica, tale condizione necessaria non è sufficiente neanche assumendo che la serie sia a termini positivi. Nella dimostrazione c'è un errore di stampa: correttamente $a_n = s_n - s_{n-1}$.

Alle pag. 9 e 10 della dispensa [SUCCESSIONI] le formule per il trattamento della serie armonica e poi delle armoniche generalizzate sono confuse con diversi errori di stampa. La cosa più semplice da fare è trascurare quest'ultima parte della dispensa e riferirsi alla successiva dispensa [LIMSUCC] dove questi argomenti sono ripresi con più cura.

(6) A pag. 8 della dispensa [LIMSUCC], la dimostrazione che se una successione di numeri reali $a_n \to +\infty$, allora $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{a_n})^{a_n} = e$ è corretta una volta osservato che la successione $(1 + \frac{1}{k_n})^{k_n}$ non è propriamente una sottosuccessione di $(1 + \frac{1}{n})^n$ (come affermato) ma il suo limite è comunque quello voluto perché la successione delle parti intere $k_n \to +\infty$ (vedi l'osservazione del punto 3 qui sopra).

(7) A pag. 2 della dispensa [C-ELEMENTARI], la frase iniziale a proposito delle "funzioni trigonometriche inverse" è confusa; va corretta come segue:

"La restrizione della funzione tangente su ogni intervallo aperto della forma

$$\left(\frac{(2m+1)\pi}{2}, \frac{(2m+3)\pi}{2}\right)$$

$m \in \mathbb{Z}$, è iniettiva con immagine uguale a $\mathbb{R}$. Possiamo allora considerare la corrispondente funzione inversa, che è elementare ed è chiamata *un ramo* della funzione *arcotangente*. Prendendo l'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ si ottiene il cosidetto *ramo principale* indicato con arctan."

(8) **(Integrazione sul criterio di Cauchy per la convergenza delle successioni)** A pag. 7 della dispensa [SUCCESSIONI] è enunciato questo criterio di convergenza e dimostrata l'implicazione facile che segue direttamente dalla definizione di limite. Qui dimostriamo l'altra implicazione usando la compattezza degli intervalli chiusi e limitati (Teorema 1.1 della dispensa [C-INTERVALLI]). Sia a_n una successione che verifica la *proprietà di Cauchy* cioè tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n, m \geq \bar{n}$, $|a_n - a_m| < \epsilon$. Vogliamo dimostrare che allora a_n è convergente. Osserviamo intanto che esiste un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ tale che per ogni n, $a_n \in [a, b]$. Infatti, per la proprietà di Cauchy, fissato un $\epsilon > 0$, a_n sta definitivamente in $I(\bar{n}, \epsilon)$ e possiamo allargare questo intervallo in modo da inglobare i finiti termini della successione che eventualmente fossero rimasti fuori. Per la compattezza dell'intervallo $[a, b]$, esiste una sottosuccessione a_{j_n} di a_n tale che $a_{j_n} \to L \in [a, b]$. Vogliamo dimostrare che anche $a_n \to L$. Combinando la definizione di limite e la proprietà di Cauchy vediamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\bar{n}$ tale che per ogni $n \geq \bar{n}$ si ha contemporaneamente che $|a_{j_n} - L| < \epsilon/2$ e che $|a_{j_n} - a_n| < \epsilon/2$. Ne segue che per $n \geq \bar{n}$, $|a_n - L| < \epsilon$, cioè L è il limite di a_n come voluto.

$\square$

(9) **(Integrazione sul teorema degli zeri)** Questo teorema è enunciato e dimostrato nella dispensa [C-INTERVALLI], Teorema 2.1. Qui ne diamo un'altra dimostrazione basata sul metodo della bisezione già utilizzato per dimostrare la compattezza degli intervalli chiusi e limitati, Teorema 1.1. Questa nuova dimostrazione è in un certo senso più costruttiva, nel senso cioè che in linea di principio permette di localizzare uno zero della funzione con un errore arbitrariamente piccolo. Allora sia $f : [\alpha_0, \beta_0] \to \mathbb{R}$ continua e tale che $f(\alpha_0)f(\beta_0) < 0$. Vogliamo individuare un punto c nell'intervallo di definizione tale che $f(c) = 0$. Consideriamo il punto medio $p_0 = (\alpha_0 + \beta_0)/2$. Ci sono due possibilità: 1) $f(p_0) = 0$ e in tal caso abbiamo finito; 2) $f(p_0) \neq 0$, allora la restrizione di f ad uno, chiamiamolo $[\alpha_1, \beta_1]$, dei due sottointervalli chiusi di $[\alpha_0, \beta_0]$ determinati da p_0 verifica le ipotesi del teorema degli zeri. Iterando la procedura, ancora una volta ci sono due possibilità: 1) troviamo un punto medio p_n tale che $f(p_n) = 0$ ed abbiamo finito; 2) esiste una successione di intervalli $[\alpha_n, \beta_n]$ tali che per ogni $n \geq 0$, $|\beta_n - \alpha_n| = \dfrac{|\beta_0 - \alpha_0|}{2^n}$ e $f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 1.1, vediamo che le due successioni α_n e β_n convergono allo stesso limite $c \in [\alpha_0, \beta_0]$. Affermiamo che $f(c) = 0$. Supponiamo per assurdo che $f(c) \neq 0$. Poiché f è continua, $f(\alpha_n) \to f(c)$ e $f(\beta_n) \to f(c)$. Per la permanenza del segno, le successioni $f(\alpha_n)$ e $f(\beta_n)$ hanno entrambe definitivamente lo stesso segno di $f(c)$, ma questo va contro il fatto che per costruzione, per ogni n, $f(\alpha_n)f(\beta_n) < 0$.

$\square$

(10) La dimostrazione del Corollario 3.2 della dispensa [C-INTERVALLI] è corretta ma troppo complicata. Più semplicemente: siano $A < B \in f(I)$, quindi $A = f(a)$ e $B = f(b)$ per qualche $a,\ b \in I$. Vogliamo dimostrare che allora tutto l'intervallo $[A, B]$ è contenuto in $f(I)$. Consideriamo la restrizione della funzione f all'intervallo di estremi a e b che è tutto contenuto in I perché I è un intervallo. Ragionando come nella dimostrazione del Teorema dei valori intermedi, Teorema 2.4, si ferifica che l'immagine di questa restrizione (che è contenuta in $f(I)$) è proprio uguale all'intervallo $[A, B]$.

$\square$

(11) Nella dimostrazione del punto (2) della Proposizione 3.3 della dispensa [C-INTERVALLI] c'è un refuso ripetuto due volte; Correttamete si deve leggere:

$$L^- := \lim_{y \to y_0^-} f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0) \leq \lim_{y \to y_0^+} f^{-1}(y) := L^+$$

e dopo

$$\lim_{y\to y_0^-} f^{-1}(y) < \lim_{y\to y_0^+} f^{-1}(y) \ .$$

(12) A pag. 6 di [INTEGRAZIONE], nell'ultimo esempio prima delle Osservazioni 2.1, la prima formula va corretta come segue:

$$\int f(x)dx = 1/a \int 1/(1+t^2)dt, \quad t = x/a$$

(13) A pag. 1 di [P-ELEMENTARI], esempio (3), I_m e J_m, non $I_m(x)$ e non $J_m(x)$.
(14) A circa metà di pag. 1 di [EQUADIFF1], eliminare "$\times I_1$" e leggere correttamente

$$(t_0, x_0, x_0^1, \dots, x_0^{n-1}) \in T \times I \times \mathbb{R}^{n-1} \ .$$

(15) All'inizio del paragrafo 3.4 di [EQUADIFF1] basta assumere che le due funzioni $a(t)$ e $b(x)$ siano continue. In seguito, quando restringiamo l'equazione sui rettangoli della forma $T \times L$ tali che $b(x) \neq 0$ per ogni x appartenente ad uno degli intervalli aperti $L \subset I$ la cui unione disgiunta coincide con $I \setminus \{b = 0\}$, assumiamo che siano verificate condizioni sufficienti affinché valgano le conclusioni del Teorema di Cauchy-Lipschitz.
(16) A pag. 7 di [EQUADIFF1], nello studio dell'esempio sul rettangolo $\mathbb{R}\times L^+$, di sta considerando $c-t^2 > 0$ (non $c-t^2 < 0$). A pag. 8, nello studio dell'esempio (2) ci sono diverse imprecisioni; sostituire tutta la trattazione dell'esempio come segue:

Consideriamo l'equazione

$$y' = a(t)b(y)$$

dove entrambe le funzione $a(t)$ e $b(x)$ sono definite su tutto $\mathbb{R}$ come segue: $a(t) = t$, $b(x) = \sqrt{x}$ se $x \geq 0$, $b(x) = 0$ se $x < 0$. Si nota che la funzione $b(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$, ma non è derivabile in 0. Per ogni $x_0 \leq 0$, abbiamo la soluzione costante $y = x_0$ e siamo ridotti a studiare la restrizione dell' equazione sul rettangolo $\mathbb{R} \times L$ dove $L = \{x \in \mathbb{R};\ x > 0\}$. Così ristrette entambe le funzioni $a(t)$ e $b(x)$ sono C^∞ per cui le ipotesi del Teorema di C-L sono verificate. Seguendo lo schema di soluzione delle equazioni a variabili separate, possiamo prendere

$$B(x) = 2\sqrt{x}, \quad A(t) = \frac{1}{2}t^2$$

quindi le curve Γ_C in $\mathbb{R} \times L$, $C \in \mathbb{R}$, sono definite dalle equazioni

$$2\sqrt{x} = \frac{1}{2}t^2 + C \ .$$

Ponendo $C = \dfrac{1}{2}c$ possiamo riscrivere nella forma

$$\sqrt{x} = \frac{t^2 + c}{4}$$

da cui necessariamente $t^2 + c > 0$. Elevando al quadrato otteniamo infine

$$x = (\frac{t^2 + c}{4})^2 \ .$$

Per cui le soluzioni massimali dell'aquazione differenziale ristretta su $\mathbb{R} \times L$ sono della forma

$$x = y_c(t) = (\frac{t^2 + c}{4})^2, \ c \in \mathbb{R}$$

dove l'intervallo J_c di definizione è determinato dalla condizione $t^2 + c > 0$. Quindi se $c > 0$, $J_c = \mathbb{R}$, la funzione $x = y_c(t)$ ha grafico simmetrico rispetto all'asse delle x, è convessa con un unico punto di minimo assoluto in $t = 0$ con valore minimo uguale a $c^2/16$. Se $c \leq 0$, allora $x = y_c(t)$ si spezza in due soluzioni definite rispettivamente sulle due semirette $(-\infty, -\sqrt{|c|})$

e $(\sqrt{|c|}, +\infty)$. In entrambi i casi le soluzioni sono convesse, strettamente decrescente la prima, strettamente crescente la seconda;

$$\lim_{t \to -\sqrt{|c|}^-} y_c(t) = 0, \quad \lim_{t \to \sqrt{|c|}^+} y_c(t) = 0$$

e lo stesso vale per le rispettive funzioni derivate. Si verifica direttamente che per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times L$, ponendo

$$C = 2\sqrt{x_0} - \frac{1}{2}t_0^2, \ c = 2C$$

si determina l' unica soluzione per l'equazione ristretta su $\mathbb{R} \times L$ tale che $y_c(t_0) = x_0$. C'è però una differenza tra le y_c con $c > 0$ rispetto a quelle per $c \leq 0$. Infatti le prime sono massimali anche come soluzioni su l'intero $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Invece se $c = 0$, la soluzione ristretta y_0, definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, si estende ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ ponendo $y_0(0) = 0$. Se $c < 0$, ogni soluzione y_c si estende in **infiniti modi diversi** ad una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$. Supponiamo per esempio di considerare $y := y_c : (\sqrt{|c|}, +\infty) \to \mathbb{R}$. Possiamo estenderla ponendo $y(t) = 0$ per $t \leq |c|$; oppure, scelto arbitrariamente $c' < c$, estendiamo y ponendo $y(t) = 0$ per $t \in [-\sqrt{|c'|}, \sqrt{|c|}]$ e considerando $y_{c'}(t)$ per $t < -\sqrt{|c'|}$. Abbiamo così verificato che per ogni $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ **esiste** una soluzione $y(t)$ definita su tutta la retta $\mathbb{R}$ tale che $y(t_0) = x_0$. D'altra parte in generale tale soluzione **non è unica**. Precisamente, esistono infiniti dati iniziali $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ per i quali passano infinite curve integrali massimali, grafici di funzioni definite su tutta $\mathbb{R}$. Questo esempio mostra che la sola continuità delle funzioni $a(t)$ e $b(x)$ non è sufficiente per garantire l' unicità; in effetti si potrebbe dimostrare che questo esempio non verifica le condizioni più forti richieste dalle ipotesi del teorema di C-L.