

Analisi I
9 Giugno 2018

COMPITO B

COGNOME NOME
MATRICOLA VALUTAZIONE + =

1. ISTRUZIONI

Gli esercizi devono essere svolti negli appositi spazi del presente fascicolo; solo questo sarà ritirato e valutato. I fogli a quadretti messi a disposizione possono essere usati liberamente ma in nessun caso saranno ritirati. Il compito è composto di due parti. La prima parte deve essere svolta preliminarmente. Essa verrà corretta per prima e valutata con un punteggio di $0 \leq x \leq 10$ punti. Condizione necessaria affinché venga preso in considerazione l'eventuale svolgimento della seconda parte è che $x \geq 6$. In tal caso la seconda parte viene valutata con un punteggio di $0 \leq y \leq 24$ punti. Il compito sarà sufficiente per l'ammissione alla prova orale se $x + y \geq 18$. In tal caso il voto di ammissione all'orale sarà $v = \min(28, x + y)$.

2. PRIMA PARTE

Esercizio 0. (punti 0) Leggere e capire le istruzioni.

Esercizio 1. (punti 3) Dire se esiste il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{n+1}\right)^n + \left(\frac{1}{n+2}\right)^n}$$

ed in caso affermativo, se possibile, calcolarlo.

SOLUZIONE.

Il limite proposto non esiste

Il limite proposto esiste e vale

Giustificazione

Esercizio 2. (punti 3)

Sia $f(x)$ la funzione $\frac{5-3x^2}{5+3x^2}$ ed L il suo limite, se esiste, per $x \rightarrow +\infty$. Determinare se esiste un M tale che per ogni $x > M$ la distanza di $f(x)$ da L è minore di $\frac{1}{4}$.

SOLUZIONE

Esercizio 3. (punti 4) Si determinino l'estremo superiore e inferiore dell'insieme

$$\left\{ x \in \mathbf{R} \mid \exists t \in \mathbf{R} \text{ tale che } x = \frac{2t}{t^2 + 1} \right\}$$

precisando se si tratta di massimo o minimo.

SOLUZIONE

3. SECONDA PARTE

Esercizio 1. (punti 6)

- (1) Determinare il pi' u grande sottoinsieme C di \mathbf{R} in cui la formula

$$f(x) = \begin{cases} \inf(1, \frac{1}{x^4}) & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

definisce una funzione continua.

- (2) Determinare il pi' u grande sottoinsieme aperto D di C tale che f sia derivabile in D .
- (3) Determinare, se esistono, punti di minimo e massimo locali di f .
- (4) Calcolare l'area del sottografico nell'intervallo $[0, 1]$

SOLUZIONE.

(1)

(2)

(3)

(4)

Esercizio 2. (punti 6)

Si consideri la funzione integrale $F : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x e^{\cos t} dt$$

- (1) Giustificare che F è ben definita.
- (2) Giustificare che F è derivabile.
- (3) Dimostrare che F è iniettiva.
- (4) Dimostrare che F è surgettiva.
- (5) Dimostrare che la funzione inversa $F^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ è derivabile e calcolare $(F^{-1})'(0)$
- (6) Dire se F è periodica.

SOLUZIONE

(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

(6)

Esercizio 3. (punti 6)

Sia $p(x) = x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 1$. Sapendo che $p(i) = 0$, determinare una primitiva della funzione $\frac{1}{p}$.

SOLUZIONE. Una primitiva della funzione è

Giustificazione.

Esercizio 4. (6 punti) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' - 8y' + 15y = e^{3x}$$

tale che $y(0) = y'(0) = 1$.

SOLUZIONE.