Analisi I BM - 2014-15 - Esercizi, foglio 9.

Esercizio 1 Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : I \to \mathbb{R}$ determinare il massimo $k \geq 0$ tale che f è di classe $\mathcal{C}^k$.

- $I = \mathbb{R}$, $f(x) = x|x-1|$.
- $I = (-1, 1)$, $f(x) = (x - 2|x|)^2$.
- $I = \mathbb{R}$, $f(0) = 0$, $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ se $x \neq 0$.
- $I = \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ se $x < 1$, $f(x) = 1 + (x-1)^3$ se $x \geq 1$.

Esercizio 2 Determinare il massimo insieme aperto D di $\mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = x \sin(x + \log(x))$ definisce una funzione elementare derivabile $f : D \to \mathbb{R}$. Determinare $f' : D \to \mathbb{R}$.

Esercizio 3 Sia $f : D \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile definita sull'aperto $D \subset \mathbb{R}$. Supponiamo che per ogni $x \in D$, $f(x) \neq 0$. Dire se $g(x) = \log(|f(x)|)$ è derivabile e nel caso affermativo calcolare g'.

Esercizio 4 Si considerino le funzioni $f, g : \{x > 0\} \to \mathbb{R}$ definite rispettivamente da $f(x) = x^x$, $g(x) = (x \log(x))^{\sin(\sqrt{x})}$. Dimostrare che sono entrambe derivabili e calcolare f', g'.

Esercizio 5 Determinare un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto della funzione $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 7)e^x$. Discutere se f presenta altri punti di massimo o minimo locale in $(0, 3)$.

Esercizio 6 Determinare un punto di massimo assoluto e un punto di minimo assoluto della funzione $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(x)\cos(2x)$. Discutere se f presenta altri punti di massimo o minimo locale in $(0, \pi/2)$.

Esercizio 7 Sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile; sia $[c, d] \subset (a, b)$ tale che $f'(c) = f'(d) = 0$, $f'(y) \neq 0$ per ogni $y \in (c, d)$. Dimostrare che esiste al più uno zero di f in (c, d) cioè un unico punto $x \in (c, d)$ tale che $f(x) = 0$.

Esercizio 8 (1) Sia $f : (A, B) \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^1$; $[a, b] \subset (A, B)$. Supponiamo che $f(a)f(b) < 0$ e che per ogni $x \in [a, b]$, $f'(x) \neq 0$. Dimostrare che allora esiste un unico zero di f in (a, b).

(2) Applicando (1), dimostrare che ognuno degli intervalli $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, +\infty)$ contiene una radice reale del polinomio $p(x) = x^5 - x^3 - 2x + 1$ e che questo non ha altre radici reali.

Esercizio 9 Sia $f : (A, B) \to \mathbb{R}$ di classe $\mathcal{C}^2$; $[a, b] \subset (A, B)$. Supponiamo che $f(a)f(b) < 0$ e che per ogni $x \in [a, b]$, $f"(x) \neq 0$. Dimostrare che allora esiste un unico $x \in (a, b)$ tale che $f(x) = 0$.

Esercizio 10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = \max(\sin(x), 1/2)$. 1) Discutere se f è continua.

2) Discutere se f è derivabile.

Esercizio 11. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definita nel modo seguente: per ogni $x < 0$, $f(x) = \min(0, x^n)$, per ogni $x \geq 0$, $f(x) = \max(0, x^n)$. Al variare di n, determinare il massimo $k \geq 0$ tale che f è di classe $\mathcal{C}^k$.

Esercizio 12. Determinare il più grande sottoinsieme D di $\mathbb{R}$ tale che la formula $f(x) = \log(\sqrt{|x| - 1} - 1)$ definisce una funzione elementare definita su D. Determinare l'insieme $\mathrm{Int}(D)$ dei punti interni di D. Discutere se la restrizione di f a $\mathrm{Int}(D)$ è derivabile.